ESERCIZI SU

GRUPPOIDI E MORFISMI

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

1 — Per ogni insieme numerico $\mathbb{X} \in \{\mathbb{N}\,,\mathbb{Z}\,,\mathbb{Q}\}$, usiamo la notazione $\mathbb{X}_+ := \big\{\, x \in \mathbb{X} \,\big|\, x > 0 \,\big\}$, $\mathbb{X}_\geq := \big\{\, x \in \mathbb{X} \,\big|\, x \geq 0 \,\big\}$ e $\mathbb{X}^* := \mathbb{X} \setminus \{0\}$. La seguente lista elenca alcuni gruppoidi, cioè insiemi con una operazione:

$$\big(\mathbb{N}\,;+\big)\,,\ \ \big(\mathbb{N}_+\,;+\big)\,,\ \ \big(\mathbb{N}\,;\cdot\,\big)\,,\ \ \big(\mathbb{N}_+\,;\cdot\,\big)\,,\ \ \big(\mathbb{N}\,;\min\big)\,,\ \ \big(\mathbb{N}\,;\max\big)$$

$$\big(\mathbb{Z}\,;+\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Z}_\geq\,;+\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Z}_+\,;\cdot\,\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Z}_\geq\,;\cdot\,\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Z}_+\,;\cdot\,\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Z}^*\,;\cdot\,\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Z}\,;\min\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Z}\,;\max\big)$$

$$\big(\mathbb{Q}\,;+\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Q}\,;-\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Q}_+\,;+\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Q}\,;\cdot\,\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Q}_+\,;\cdot\,\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Q}^*\,;\cdot\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Q}^*\,;\ /\ \big)$$

(dove " / " indica l'operazione di divisione tra due numeri razionali non nulli)

$$\big(\mathbb{Q}\,;\min\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Q}\,;\max\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Q}_\geq\,;\max\big)\,,\ \ \big(\mathbb{Q}_+\,;\max\big)$$

Per ciascuno di tali gruppoidi, si determini se sia un *semigruppo* (cioè l'operazione sia associativa), oppure sia *commutativo* (cioè l'operazione sia commutativa), oppure sia *cancellativo*, oppure sia un *monoide* (cioè sia un semigruppo e possieda un elemento neutro), oppure sia un *gruppo* (cioè sia un monoide in cui ogni elemento abbia inverso).

2 — Se E è un qualsiasi insieme, indichiamo con $\mathcal{P}(E)$, risp. $\mathcal{R}(E) := \mathcal{P}\big(E \times E\big)$, risp. E^E , risp. $\mathcal{S}(E)$, l'insieme delle parti di E , risp. l'insieme delle relazioni (binarie) in E , risp. l'insieme delle applicazioni da E in E , risp. l'insieme delle permutazioni di E .

La seguente lista elenca alcuni gruppoidi, cioè insiemi con un'operazione, associati a E :

$$\big(\,\mathcal{P}(E)\,;\cup\big)\,,\quad \big(\,\mathcal{P}(E)\,;\cap\big)\,,\quad \big(\,\mathcal{P}(E)\,;\ \setminus\ \big)\,,\quad \big(\,\mathcal{P}(E)\,;\triangle\,\big)$$

$$\big(\,\mathcal{R}(E)\,;\circ\,\big)\ ,\qquad \big(\,E^E\,;\circ\,\big)\ ,\qquad \big(\,\mathcal{S}(E)\,;\circ\big)$$

Per ciascuno di tali gruppoidi, si determini se sia un *semigruppo*, oppure sia *commutativo*, oppure sia *cancellativo*, oppure sia un *monoide*, oppure sia un *gruppo*.

Suggerimento: Alcune delle proprietà dei gruppoidi in esame cambiano (!) quando E è "piccolo", precisamente per $\big|E\big| \leq 1$, oppure $\big|E\big| \leq 2$, ecc. Ad esempio, il gruppoide $\big(\,E^E\,;\circ\,\big)$ è commutativo se e soltanto se $\big|E\big| \leq 1$.

3 — Sia $\ast : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'operazione (binaria) in $\mathbb{N}$ definita da $\ell \ast n := \ell + n + \ell\, n$ per ogni $\ell, n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che $\big(\,\mathbb{N}\,;\ast\,\big)$ è monoide commutativo, ma *non* è un gruppo.

4 — Sia $\big(\varGamma\,;\,*\big)$ un gruppoide. Dimostrare che se tale gruppoide ha un elemento neutro, allora esso è unico (in altre parole, in un gruppoide esiste al più un solo elemento neutro).

Suggerimento: *Si tratta di verificare che, se* $e', e'' \in \varGamma$ *sono entrambi elementi neutri, allora necessariamente si ha* $e' = e''$.

5 — Sia $\big(M\,;\,\bullet\big)$ un monoide. Dimostrare che se esiste un elemento inverso di un $m \in M$, allora tale inverso è unico (in altre parole, ogni elemento di M ha al più un solo elemento inverso).

Suggerimento: *Si tratta di verificare che, se* $m', m'' \in M$ *sono entrambi elementi inversi di* m *, allora necessariamente si ha* $m' = m''$.

6 — *Prodotti diretti di gruppoidi:* Siano E_1 ed E_2 due gruppoidi, ciascuno con operazione indicata rispettivamente da $\underset{1}{*}$ e $\underset{2}{*}$. Nel prodotto cartesiano $E_1 \times E_2$ si consideri l'operazione $*$ definita da

$$\big(e'_1\,,e'_2\big) * \big(e''_1\,,e''_2\big) := \big(e'_1 \underset{1}{*} e''_1\,,\, e'_2 \underset{2}{*} e''_2\big) \qquad \forall\; \big(e'_1\,,e'_2\big)\,,\big(e''_1\,,e''_2\big) \in E_1 \times E_2$$

così che $\big(E_1 \times E_2\,;\,*\big)$ è a sua volta un gruppoide, detto *(gruppoide) prodotto diretto — o semplicemente "prodotto" — dei due gruppoidi* $\big(E_1\,;\,\underset{1}{*}\big)$ *e* $\big(E_2\,;\,\underset{2}{*}\big)$. Dimostrare che:

(a) se i gruppoidi $\big(E_1\,;\,\underset{1}{*}\big)$ e $\big(E_2\,;\,\underset{2}{*}\big)$ sono commutativi, allora anche $\big(E_1 \times E_2\,;\,*\big)$ è commutativo;

(b) se $\big(E_1\,;\,\underset{1}{*}\big)$ e $\big(E_2\,;\,\underset{2}{*}\big)$ sono semigruppi, allora anche $\big(E_1 \times E_2\,;\,*\big)$ è semigruppo;

(c) se $\big(E_1\,;\,\underset{1}{*}\big)$ e $\big(E_2\,;\,\underset{2}{*}\big)$ sono monoidi, allora anche $\big(E_1 \times E_2\,;\,*\big)$ è monoide;

(d) se $\big(E_1\,;\,\underset{1}{*}\big)$ e $\big(E_2\,;\,\underset{2}{*}\big)$ sono gruppi, allora anche $\big(E_1 \times E_2\,;\,*\big)$ è gruppo;

(e) generalizzare la costruzione del "gruppoide prodotto diretto" e i relativi risultati espressi in *(a)–(d)* al caso di un numero finito arbitrario n fattori, che siano gruppoidi $\big(E_1\,;\,\underset{1}{*}\big)\,,\;\dots,\;\big(E_n\,;\,\underset{n}{*}\big)$.

7 — Sia $\big(E\,;\,*\big)$ un gruppoide, e sia X un insieme non vuoto. Nell'insieme E^X di tutte le funzioni da X ad E si consideri l'operazione $\circledast$ definita da

$$h \circledast k : X \longrightarrow E\,,\;\; x \mapsto \big(h \circledast k\big)(x) := h(x) * k(x) \qquad \forall\, x \in X \;\;, \qquad \forall\; h,k \in E^X$$

così che $\big(E^X\,;\,\circledast\big)$ è a sua volta un gruppoide. Dimostrare che se $\big(E\,;\,*\big)$ è commutativo, risp. semigruppo, risp. monoide, risp. gruppo, allora anche $\big(E^X\,;\,\circledast\big)$ è semigruppo, risp. semigruppo, risp. monoide, risp. gruppo.

8 — Sia $\big(E\,;\,*\big)$ un gruppoide, e sia $n \in \mathbb{N}_+$. Sia $E^n := E \times \cdots \times E$ (con n fattori tutti uguali ad E) il gruppoide prodotto definito come nell'**Esercizio 6** qui sopra, e sia $E^{\{1,\dots,n\}}$ il gruppoide di funzioni da $X := \{1,\dots,n\}$ ad E definito come nell'**Esercizio 7** qui sopra. Dimostrare che i due gruppoidi E^n ed $E^{\{1,\dots,n\}}$ sono isomorfi tra loro.

<u>Suggerimento:</u> *Vogliamo costruire un morfismo* $\phi : E^{\{1,\dots,n\}} \longrightarrow E^n$ *ed un morfismo* $\psi : E^n \longrightarrow E^{\{1,\dots,n\}}$ *la cui composizione — in un verso e nell'altro — sia l'identità. A tal fine, da un lato osserviamo che ogni funzione* $f \in E^{\{1,\dots,n\}}$ *determina una* n*–upla* $\big(f(1),\dots,f(n)\big)$ *di valori in* E*, e anzi* ϕ *è univocamente determinata da tale* n*–upla. Dall'altro lato, ogni* n*–upla* $(e_1,\dots,e_n) \in E^n$ *consente di definire in modo naturale una funzione* $f \in E^{\{1,\dots,n\}}$*. Quindi...*

9 — Sia $E := E_1 \times \cdots \times E_n$ il prodotto diretto di n gruppoidi $E_1, \dots, E_n$ (definito come nell'**Esercizio 6** qui sopra).

(a) Per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$, sia $\pi_i : E := E_1 \times \cdots \times E_n \twoheadrightarrow E_i$ la funzione suriettiva data da $\pi_i(e_1,\dots,e_n) := e_i$ per ogni $(e_1,\dots,e_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n =: E$.

Dimostrare che π_i è un morfismo.

(b) Per ogni $j \in \{1,\dots,n\}$, si fissi un elemento $e'_j \in E_j$. Per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$, sia $\eta_i : E_i \hookrightarrow E_1 \times \cdots \times E_n =: E$ la funzione iniettiva data da $\eta_i(e) := \big(e''_1,\dots,e''_n\big)$ con $e''_j := e'_j$ per ogni $j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}$, $e''_i := e$.

Dimostrare che η_i è un morfismo se e soltanto se gli elementi e'_j (con $j \neq i$) sono tali che $e'_j \cdot e'_j = e'_j$ (cioè sono *idempotenti*).

<u>Suggerimento:</u> *Si tratti prima il caso* $n = 2$*, poi generalizzare sarà immediato.*

10 — Sia E un gruppoide, sia X un insieme non vuoto, E^X il gruppoide di tutte le funzioni da X ad E (con l'operazione definita come nell'**Esercizio 7** qui sopra).

(a) Per ogni $x \in X$, sia $ev_x : E^X \longrightarrow E$ la funzione data da $ev_x(f) := f(x)$ per ogni $f \in E^X$. Dimostrare che ev_x è un epimorfismo.

(b) Si fissi un elemento $e' \in E$ tale che $e' \cdot e' = e'$ (cioè e' è *idempotente*). Per ogni $x \in X$ e per ogni $e \in E$, sia $\kappa_x^{(e)} : X \hookrightarrow E$ la funzione iniettiva data da

$$\kappa_x^{(e)}(x) := e \quad , \qquad \kappa_x^{(e)}\big(x'\big) := e' \qquad \forall\; x' \in X \setminus \{x\}$$

Dimostrare che la funzione $\kappa_x : E \longrightarrow E^X$ data da $\kappa_x(e) := \kappa_x^{(e)}$ è un monomorfismo.

<u>Suggerimento:</u> *È più fumo che arrosto, si tratta soltanto di fare verifiche dirette.*

11 — Sia E un insieme, e $F \subseteq E$ un suo sottoinsieme. Consideriamo la funzione $\phi_F : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ e la relazione $\overset{F}{\sim}$ in $\mathcal{P}(E)$ definite da

$$\phi_F(C) := C \cap F \quad \forall\ C \in \mathcal{P}(E) \ , \qquad A \overset{F}{\sim} B \iff A \cap F = B \cap F \quad \forall\ A, B \in \mathcal{P}(E)$$

Dimostrare che:

(a) la relazione $\overset{F}{\sim}$ è un'equivalenza;

(b) la relazione $\overset{F}{\sim}$ coincide con la relazione associata alla funzione ϕ_F ;

(c.1) la relazione $\overset{F}{\sim}$ è compatibile con l'operazione $\cap$ in $\mathcal{P}(E)$;

(c.2) la funzione ϕ_F è un endomorfismo del semigruppo $\big(\mathcal{P}(E)\,;\cap\big)$;

(d.1) la relazione $\overset{F}{\sim}$ è compatibile con l'operazione $\cup$ in $\mathcal{P}(E)$;

(d.2) la funzione ϕ_F è un endomorfismo del semigruppo $\big(\mathcal{P}(E)\,;\cup\big)$.

<u>Suggerimento</u>: *Si può dimostrare tutto con calcoli abbastanza elementari, comunque per verifica diretta. Inoltre:*

— *la parte (a) segue anche direttamente dalla parte (b),*

— *la parte (c.1) segue anche direttamente dalle parti (b) e (c.2),*

— *la parte (d.1) segue anche direttamente dalle parti (b) e (d.2).*

Infine, tutto questo è un'applicazione particolare dell'Esercizio 12 — per le parti (a), (b) e (c.1–2) — e dell'Esercizio 13 — per le parti (a), (b) e (d.1–2).

12 — Sia $\big(\mathcal{S}\,;*\big)$ un gruppoide, e sia $\varsigma \in \mathcal{S}$. Si definiscano la funzione $\phi_\varsigma : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$, $s \mapsto \phi_\varsigma(s) := \varsigma * s = s * \varsigma$ $(\forall\ s \in \mathcal{S})$, da $\mathcal{S}$ in sé stesso, e la relazione $\overset{\varsigma}{\sim}$ in $\mathcal{S}$ data da $s' \overset{\varsigma}{\sim} s'' \overset{\Delta}{\iff} s' * \varsigma = s'' * \varsigma$ $(\forall\ s', s'' \in \mathcal{S})$.

Dimostrare che:

(a) la relazione $\overset{\varsigma}{\sim}$ è un'equivalenza;

(b) la relazione $\overset{\varsigma}{\sim}$ coincide con la relazione associata alla funzione $\phi_\varsigma : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$.

<u>Suggerimento</u>: *È essenzialmene un esercizio sugli insiemi, più che sui gruppoidi! La parte (a) si ottiene con calcoli diretti, ma segue anche dalla parte (b).*

N.B.: applicando questi risultati al caso del gruppoide $\big(\mathcal{S}\,;*\big) := \big(\mathcal{P}(E)\,;\cap\big)$ *e di* $\varsigma := F$ *si ottengono i risultati (a) e (b) dell'Esercizio 11 qui sopra.*

13 — Sia $\big(S\,;*\big)$ un semigruppo, e sia $\sigma \in S$ un elemento tale che

$$\sigma^2 := \sigma * \sigma = \sigma \qquad \text{(in parole, “}\sigma\text{ è } \textit{idempotente}\text{”)}$$

$$\sigma * s = s * \sigma \quad \forall\ s \in S \qquad \text{(in parole, “}\sigma\text{ è } \textit{centrale}\text{”)}$$

Si considerino poi i due sottoinsiemi di S così definiti:

$$\sigma * S := \big\{\, \sigma * s \,\big|\, s \in S \,\big\} \quad , \qquad S * \sigma := \big\{\, s * \sigma \,\big|\, s \in S \,\big\}$$

Inoltre, si definiscano la funzione $\phi_\sigma : S \longrightarrow S\,,\ s \mapsto \phi_\varsigma(s) := \sigma * s = s * \sigma\ \ (\forall\, s \in S\,)$, da S in sé stesso e la relazione $\stackrel{\sigma}{\sim}$ in S data da $s' \stackrel{\sigma}{\sim} s'' \stackrel{\Delta}{\iff} s' * \sigma = s'' * \sigma\ \ (\forall\, s', s'' \in S\,)$.

Dimostrare che:

(a) $\sigma * S = S * \sigma$;

(b) il sottoinsieme $\sigma * S = S * \sigma$ è un monoide per l(a restrizione dell)'operazione $*$;

(c) la relazione $\stackrel{\sigma}{\sim}$ è compatibile con l'operazione $*$;

(d) la relazione $\stackrel{\sigma}{\sim}$ è un'equivalenza;

(e) la relazione $\stackrel{\sigma}{\sim}$ coincide con la relazione associata alla funzione $\phi_\sigma : S \longrightarrow S$;

(f) la funzione ϕ_σ è un endomorfismo del semigruppo $\big(S\,;\,*\big)$.

<u>Suggerimento</u>: *La parte (a) sfrutta soltanto l'ipotesi che σ sia centrale. La parte (b) si ottiene con calcoli diretti, ma segue anche dalla parte (f). La parte (c) si ottiene con calcoli diretti, ma segue anche dalla parte (e) ed (f). Le parti (d) ed (e) sono applicazioni particolari dell'Esercizio 12 qui sopra. La parte (f) si dimostra con un calcolo esplicito.*

N.B.: applicando questi risultati al caso del semigruppo $\big(S\,;\,*\big) := \big(\mathcal{P}(E)\,;\,\cap\big)$ e di $\sigma := F$ si ottengono i risultati (a), (b) e (c.1–2) dell'Esercizio 11 qui sopra.

14 — Sia $\big(S\,;\,*\big)$ un semigruppo. Per un fissato $\sigma \in S$, si considerino la funzione $\phi_\sigma : S \longrightarrow S\,,\ \ s \mapsto \phi(s) := \sigma * s = s * \sigma\ \ (\forall\ s \in S\,)$, e la relazione $\stackrel{\sigma}{\sim}$ in S data da $s' \stackrel{\sigma}{\sim} s'' \stackrel{\Delta}{\iff} s' * \sigma = s'' * \sigma\ \ (\forall\, s', s'' \in S\,)$ — come negli **Esercizi 12 e 13** qui sopra.

Sia poi $\bullet$ un'altra operazione (binaria) in S, per la quale supponiamo che si abbia

$$\big(s' \bullet s''\big) * \sigma \ = \ \big(s' * \sigma\big) \bullet \big(s' * \sigma\big) \qquad\qquad \forall\ s', s'' \in S$$

Dimostrare che:

(a) la relazione $\stackrel{\sigma}{\sim}$ è compatibile con l'operazione $\bullet$;

(b) la relazione $\stackrel{\sigma}{\sim}$ è un'equivalenza;

(c) la relazione $\stackrel{\sigma}{\sim}$ coincide con la relazione associata alla funzione $\phi_\sigma : S \longrightarrow S$;

(d) la funzione ϕ_σ è un endomorfismo del semigruppo $\big(S\,;\,\bullet\big)$.

<u>Suggerimento</u>: *Tutto segue da calcoli diretti (elementari). Inoltre, le parti (b) e (c) sono applicazioni particolari dell'Esercizio 12 qui sopra, mentre la parte (a) segue anche dalle parti (c) e (d).*

N.B.: applicando questi risultati al caso del semigruppo $\big(S\,;\,*\big) := \big(\mathcal{P}(E)\,;\,\cup\big)$ e di $\sigma := F$ si ottengono i risultati (a), (b) e (d.1–2) dell'Esercizio 11 qui sopra.

15 — Sia $\big(S\,;*\big)$ un semigruppo. Per ogni $s \in S$, si dimostri che la funzione

$$\phi_s : \big(\mathbb{N}_+\,;+\big) \longrightarrow \big(S\,;*\big) \quad , \qquad n \mapsto \phi_s(n) := s^n = \underbrace{s*\cdots*s}_{n \text{ volte}} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_+$$

è un morfismo.

16 — Sia Σ un semigruppo abeliano. Per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, si dimostri che la funzione "potenza n–esima", cioè $\varpi_n : \Sigma \longrightarrow \Sigma\,,\ \sigma \mapsto \varpi_n(\sigma) := \sigma^n$ — con la usuale notazione delle potenze come nell'**Esercizio 15** qui sopra — è un endomorfismo di Σ.

17 — Per ogni $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, si consideri $\phi_{(a,b)} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la funzione definita da

$$\phi_{(a,b)} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad , \qquad (m,n) \mapsto \phi_{(a,b)}(m,n) := a^m\, b^n \qquad \forall\ (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Dimostrare che:

(a) la funzione $\phi_{(a,b)}$ è un morfismo dal gruppoide prodotto $\big(\mathbb{N}\,;+\big) \times \big(\mathbb{N}\,;+\big)$ — nel senso dell'**Esercizio 6** qui sopra — al gruppoide $\big(\mathbb{N}\,;\cdot\big)$;

(b) se $a > 1$ e $a^2 = b$, allora la funzione $\phi_{(a,b)}$ *non* è iniettiva;

(c) se a e b sono primi distinti, allora la funzione $\phi_{(a,b)}$ è iniettiva.

18 — Sia $\mathbb{A} \in \big\{\mathbb{N}\,,\mathbb{Z}\,,\mathbb{Q}\,,\mathbb{R}\,,\mathbb{C}\big\} \cup \big\{\mathbb{Z}_n\big\}_{n \in \mathbb{N}_+}$, oppure (più in generale) sia $\mathbb{A}$ un qualsiasi *anello*. Dati $h, k \in \mathbb{N}_+$, sia

$$Mat_{h \times k}(\mathbb{A}) := \Big\{ (a_{i,j})_{i=1,\dots,h;}^{j=1,\dots,k;} \,\Big|\, a_{i,j} \in \mathbb{A}\ \forall\, i,j \Big\}$$

l'insieme delle matrici $h \times k$ a coefficienti in $\mathbb{A}$. Per tale insieme consideriamo le operazioni "$\oplus$" e "$\odot$" definite da

$$\big(a'_{i,j}\big)_{i,j} \oplus \big(a''_{i,j}\big)_{i,j} := \big(a'_{i,j} + a''_{i,j}\big)_{i,j} \quad , \qquad \big(a'_{i,j}\big)_{i,j} \odot \big(a''_{i,j}\big)_{i,j} := \big(a'_{i,j} \cdot a''_{i,j}\big)_{i,j}$$

Inoltre, nel caso di $h = k =: n$ (cioè per matrici quadrate di taglia n) si consideri anche l'operazione di "prodotto righe per colonne" — indicato con "$\bullet$" — definito da

$$\big(a'_{i,j}\big)_{i,j} \bullet \big(a''_{i,j}\big)_{i,j} := \Big(\textstyle\sum_{\ell=1}^{n} a'_{i,\ell} \cdot a''_{\ell,j}\Big)_{i,j}$$

Dimostrare che:

(a) il gruppoide $\big(Mat_{h \times k}(\mathbb{A})\,;\oplus\big)$ è un gruppo abeliano;

(b) il gruppoide $\big(Mat_{h \times k}(\mathbb{A})\,;\odot\big)$ è un semigruppo abeliano, ed è un monoide se l'anello $\mathbb{A}$ è unitario — come nel caso $\mathbb{A} \in \big\{\mathbb{N}\,,\mathbb{Z}\,,\mathbb{Q}\,,\mathbb{R}\,,\mathbb{C}\big\} \cup \big\{\mathbb{Z}_n\big\}_{n \in \mathbb{N}_+}$ — ma *non* è un gruppo se $\mathbb{A} \neq \{0\}$ — come nel caso $\mathbb{A} \in \big\{\mathbb{N}\,,\mathbb{Z}\,,\mathbb{Q}\,,\mathbb{R}\,,\mathbb{C}\big\} \cup \big\{\mathbb{Z}_n\big\}_{n \in \mathbb{N}_+}$;

(c) il gruppoide $\big(Mat_{n \times n}(\mathbb{A})\,;\bullet\big)$ è un semigruppo, ed è un monoide se l'anello $\mathbb{A}$ è unitario — come nel caso $\mathbb{A} \in \big\{\mathbb{N}\,,\mathbb{Z}\,,\mathbb{Q}\,,\mathbb{R}\,,\mathbb{C}\big\} \cup \big\{\mathbb{Z}_n\big\}_{n \in \mathbb{N}_+}$ — ma *non* è un gruppo

se $\mathbb{A} \neq \{0\}$, ed è commutativo se e soltanto se $\mathbb{A} \cdot \mathbb{A} = \{0\}$ oppure $n = 1$ e l'anello $\mathbb{A}$ è commutativo;

(d) quando l'anello $\mathbb{A}$ — come accade nel caso $\mathbb{A} \in \big\{ \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \big\} \cup \big\{ \mathbb{Z}_n \big\}_{n \in \mathbb{N}_+}$ — è unitario e commutativo, descrivere il gruppo $GL_n(\mathbb{A}) := U\big(Mat_{n\times n}(\mathbb{A}) ; \bullet \big)$ degli elementi invertibili nel monoide $\big(Mat_{n\times n}(\mathbb{A}) ; \bullet \big)$, cioè il gruppo delle matrici (quadrate) invertibili rispetto al prodotto righe per colonne.

Suggerimento: Le parti (a), (b) e (c) sono verifiche dirette, elementari; per l'ultima parte dell'enunciato (c) basta trovare matrici 2×2 che non commutino tra loro (si cerchino matrici del genere fatte soltanto di qualche 1 e di qualche 0...). Per (d) occorre conoscere la formula esplicita per l'inversa di una matrice — rispetto al prodotto $\bullet$ — e osservare che essa richiede soltanto una certa condizione sul determinante *della matrice data.*

19 — Dato $\mathbb{A} \in \big\{ \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \big\} \cup \big\{ \mathbb{Z}_n \big\}_{n \in \mathbb{N}_+}$ e $h, k \in \mathbb{N}_+$, si consideri in $\mathbb{A}^2 := \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ l'operazione "$\star$" definita da

$$(a,b) \star \big(a',b'\big) := \big(a\,a', a'b + b'\big) \qquad \forall\ (a,b), \big(a',b'\big) \in \mathbb{A}^2$$

(a) Dimostrare che $\big(\mathbb{A}^2 ; \star\big)$ è un monoide, *non* è commutativo, e *non* è un gruppo.

(b) Descrivere esplicitamente il gruppo $U\big(\mathbb{A}^2 ; \star\big)$ degli elementi invertibili in $\big(\mathbb{A}^2 ; \star\big)$.

20 — Dato $\mathbb{A} \in \big\{ \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \big\} \cup \big\{ \mathbb{Z}_n \big\}_{n \in \mathbb{N}_+}$, si consideri il monoide $\big(\mathbb{A}^2 ; \star\big)$ introdotto nell'**Esercizio 19** qui sopra. Per ogni $(a,b) \in \mathbb{A}^2$ si consideri la funzione $f_{(a,b)} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ definita da $f_{(a,b)}(x) := a\,x + b$ per ogni $x \in \mathbb{A}$.

(a) Dimostrare che la funzione $\Phi : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathbb{A}}$ data da $\Phi(a,b) := f_{(a,b)}$, per ogni $(a,b) \in \mathbb{A}^2$, è un monomorfismo dal monoide $\big(\mathbb{A}^2 ; \star\big)$ al monoide $\big(\mathbb{A}^{\mathbb{A}} ; \circ\big)$.

(b) Dimostrare che il morfismo Φ considerato in *(a)* manda l'elemento neutro del monoide di partenza nell'elemento neutro del monoide di arrivo.

21 — Sia Σ un semigruppo abeliano. Nell'insieme $\Sigma \times \mathbb{N}_+$ si consideri l'operazione (binaria) "$*$" definita da

$$(a,m) * (b,n) := \big(a\,b^m, m\,n\big) \qquad \forall\ (a,m), (b,n) \in \Sigma \times \mathbb{N}_+$$

Dimostrare che:

(a) il gruppoide $\big(\Sigma \times \mathbb{N}_+ ; *\big)$ è un semigruppo;

(b) il semigruppo $\big(\Sigma \times \mathbb{N}_+ ; *\big)$ è commutativo $\iff$ il semigruppo Σ è commutativo;

(c) il semigruppo $\big(\Sigma \times \mathbb{N}_+ ; *\big)$ è un monoide $\iff$ il semigruppo Σ è un monoide;

(d) nel caso in cui il semigruppo Σ sia un monoide — e quindi $\big(\Sigma \times \mathbb{N}_+ ; *\big)$ sia a sua volta un monoide — dimostrare che $U\big(\Sigma \times \mathbb{N}_+ ; *\big) = U\big(\Sigma\big) \times \{1\}$.

Suggerimento: *Per le parti (b) e (c) si dimostri prima l'implicazione "$\Longleftarrow$", che è una mera verifica elementare. Analogamente, per la parte (d) si dimostri prima l'inclusione "$\supseteq$", che richiede soltanto una verifica diretta.*

22 — Dato un insieme E, per ogni $A \in \mathcal{P}(E)$ si definiscano

$$E_A^E := \big\{ f \in E^E \,\big|\, f(A) \subseteq A \big\} \quad , \qquad E_{(A)}^E := \big\{ f \in E^E \,\big|\, f(a) = a \ \ \forall\, a \in A \big\}$$

Dimostrare che:

(a) $E_A^E \supseteq E_{(A)}^E$;

(b) se $A, B \in \mathcal{P}(E)$ con $A \subseteq B$, allora $E_{(A)}^E \supseteq E_{(B)}^E$;

(c) E_A^E ed $E_{(A)}^E$ sono monoidi rispetto alla composizione.

23 — Dato un insieme X e una relazione (binaria) ρ in X si definisca

$$X_{[\rho]}^X := \big\{ \ell \in X^X \,\big|\, x' \rho\, x'' \Longrightarrow \ell\big(x'\big)\, \rho\, \ell\big(x''\big) \,,\ \forall\, x', x'' \in X \big\}$$

Dimostrare che:

(a) $X_{[\rho]}^X$ è un monoide rispetto alla composizione;

(b) con la notazione dell'**Esercizio 22** qui sopra, considerato che $\rho \in \mathcal{P}(X \times X)$, si ha

$$X_{[\rho]}^X = \Big\{ \ell \in X^X \,\Big|\, (\ell \times \ell\,) \in (X \times X)_\rho^{(X \times X)} \Big\}$$

dove $(\ell \times \ell\,) : X \times X \longrightarrow X \times X$ è la funzione definita da $(\ell \times \ell\,)\big(x', x''\big) := \big(\ell\big(x'\big), \ell\big(x''\big)\big)$.

24 — Data una funzione $f : A \longrightarrow B$ tra insiemi, definiamo le funzioni

$$f_* : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B) \quad , \qquad A' \mapsto f_*\big(A'\big) := f\big(A'\big) \quad ,$$
$$f^* : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \quad , \qquad B' \mapsto f^*\big(B'\big) := f^{-1}\big(B'\big) \quad .$$

Dimostrare che:

(a) f_* è un morfismo dal gruppoide $\big(\mathcal{P}(A)\,;\cup\big)$ al gruppoide $\big(\mathcal{P}(B)\,;\cup\big)$;

(b) f_* *non* è un morfismo dal gruppoide $\big(\mathcal{P}(A)\,;\cap\big)$ al gruppoide $\big(\mathcal{P}(B)\,;\cap\big)$;

(c) f^* è un morfismo dal gruppoide $\big(\mathcal{P}(B)\,;\cup\big)$ al gruppoide $\big(\mathcal{P}(A)\,;\cup\big)$;

(d) f^* è un morfismo dal gruppoide $\big(\mathcal{P}(B)\,;\cap\big)$ al gruppoide $\big(\mathcal{P}(A)\,;\cap\big)$.

25 — Siano $\mu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\delta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ le due operazioni (binarie) in $\mathbb{N}$ date rispettivamente da $a\,\mu\,b := \text{m.c.m.}(a,b)$ e da $a\,\delta\,b := \text{M.C.D.}(a,b)$. Sia poi $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la funzione definita da $f(n) := n\,\mathbb{N} = \big\{ n\,\ell \,\big|\, \ell \in \mathbb{N} \big\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrare che:

(a) la funzione f è un morfismo dal gruppoide $\big(\mathbb{N}\,;\,\mu\big)$ al gruppoide $\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\,\cap\big)$;

(b) la funzione f *non* è un morfismo dal gruppoide $\big(\mathbb{N}\,;\,\delta\big)$ al gruppoide $\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\,\cup\big)$.

<u>Suggerimento:</u> Si sfrutti l'esistenza e unicità della fattorizzazione in primi per ogni numero naturale non nullo, trattando a parte i casi in cui uno dei numeri in esame sia 0 .

26 — Sia $\big(K\,;\,*\big)$ un gruppoide, e sia $\phi \in K^K$ una endofunzione di K . Verificare che ϕ è un *endomorfismo* di $\big(K\,;\,*\big)$ se e soltanto se ϕ (pensato come relazione in K) è *compatibile* con l'operazione $*$ in K .

<u>Suggerimento:</u> Si tratta soltanto di rileggere le definizioni...

27 — Sia $|\cdot| : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'usuale funzione "valore assoluto". Verificare che:

(a) $|\cdot|$ è un morfismo dal gruppoide $\big(\mathbb{Z}\,;\,\cdot\big)$ al gruppoide $\big(\mathbb{N}\,;\,\cdot\big)$;

(b) $|\cdot|$ *non* è un morfismo dal gruppoide $\big(\mathbb{Z}\,;\,+\big)$ al gruppoide $\big(\mathbb{N}\,;\,+\big)$.

28 — Sia $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'usuale funzione "modulo", definita da $|a+i\,b| := \sqrt{a^2+b^2}$, per ogni $(a+i\,b) \in \mathbb{C}$. Verificare che:

(a) $|\cdot|$ è un morfismo dal gruppoide $\big(\mathbb{C}\,;\,\cdot\big)$ al gruppoide $\big(\mathbb{R}\,;\,\cdot\big)$;

(b) $|\cdot|$ *non* è un morfismo dal gruppoide $\big(\mathbb{C}\,;\,+\big)$ al gruppoide $\big(\mathbb{R}\,;\,+\big)$.

29 — Sia $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ r \mapsto \phi(r) := r^2$.

(a) Dimostrare che ϕ è un endomorfismo del gruppoide $\big(\mathbb{R}\,;\,\cdot\big)$.

(b) Dimostrare che ϕ ha per immagine il gruppoide $\big(\mathbb{R}_{\geq}\,;\,\cdot\big)$, dove

$$\mathbb{R}_{\geq} := \big\{\, r \in \mathbb{R} \,\big|\, r \geq 0 \,\big\} \quad .$$

(c) Dimostrare che ϕ *non* è iniettivo.

(d) Descrivere esplicitamente la classe di equivalenza $[r]_{\rho_\phi}$ di ogni $r \in \mathbb{R}$ rispetto alla equivalenza ρ_ϕ canonicamente associata alla funzione ϕ .

(e) Dimostrare che il gruppoide quoziente $\Big(\mathbb{R}/\rho_\phi\,;\,\cdot\Big)$ è isomorfo al gruppoide $\big(\mathbb{R}_{\geq}\,;\,\cdot\big)$.

<u>Suggerimento:</u> Per la parte (e), si applichi il Teorema Fondamentale di Omomorfismo al morfismo $\phi\big(\mathbb{R}\,;\,\cdot\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}\,;\,\cdot\big)$: .

30 — Sia $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ z \mapsto \varphi(z) := z^2\,.$

(a) Dimostrare che φ è un endomorfismo del gruppoide $\big(\mathbb{C}\,;\,\cdot\,\big)$.

(b) Dimostrare che φ è suriettivo.

(c) Dimostrare che φ *non* è iniettivo.

(d) Descrivere esplicitamente la classe di equivalenza $[z]_{\rho_\varphi}$ di ogni $z \in \mathbb{C}$ rispetto alla equivalenza ρ_φ canonicamente associata alla funzione φ .

(e) Dimostrare che il gruppoide quoziente $\Big(\mathbb{C}\big/\rho_\varphi\,;\,\cdot\Big)$ è isomorfo al gruppoide $\big(\mathbb{C}\,;\,\cdot\,\big)$.

<u>Suggerimento</u>: *Per la parte (e), si applichi il Teorema Fondamentale di Omomorfismo al morfismo* $\varphi : \big(\mathbb{C}\,;\,\cdot\,\big) \longrightarrow \big(\mathbb{C}\,;\,\cdot\,\big)$.

31 — Definiamo in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ il sottoinsieme $S^1 := \big\{\, z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1 \big\}$ e la funzione $\kappa : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*\,,\ z \mapsto \kappa(z) := z\big/|z|$. Dimostrare che:

(a) $\big(\mathbb{C}^*\,;\,\cdot\,\big)$ è un gruppo abeliano;

(b) $\big(S^1\,;\,\cdot\,\big)$ è un gruppo abeliano;

(c) la funzione κ è un endomorfismo del gruppo $\big(\mathbb{C}^*\,;\,\cdot\,\big)$.

(d) indicando con ρ_κ l'equivalenza in $\mathbb{C}^*$ canonicamente associata alla funzione κ , la classe di ρ_κ–equivalenza $[z]_{\rho_\kappa}$ di un elemento $z \in \mathbb{C}^*$ è data da $[z]_{\rho_\kappa} = \big\{\, r\,z \,\big|\, r \in \mathbb{R}_+ \big\}$.

(e) Dimostrare che il gruppoide quoziente $\Big(\mathbb{C}^*\!\big/\rho_\kappa\,;\,\cdot\Big)$ è isomorfo al gruppoide $\big(S^1\,;\,\cdot\,\big)$.

<u>Suggerimento</u>: *Per la parte (e), si applichi il Teorema Fondamentale di Omomorfismo al morfismo* $\kappa : \big(\mathbb{C}^*\,;\,\cdot\,\big) \longrightarrow \big(\mathbb{C}^*\,;\,\cdot\,\big)$.

32 — Definiamo in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la relazione $\simeq$ data da $z_1 \simeq z_2 \iff z_1\, z_2^{-1} \in \mathbb{R}_+$.
Dimostrare che:

(a) la relazione $\simeq$ è un'equivalenza;

(b) per ogni $z \in \mathbb{C}^*$, la classe di $\simeq$–equivalenza $[z]_\simeq$ è data da

$$[z]_\simeq \;=\; z\,\mathbb{R}_+ \;:=\; \big\{\, z\,r \,\big|\, r \in \mathbb{R}_+ \big\}\;;$$

(c) la relazione $\simeq$ è compatibile con l'operazione $\cdot$ (prodotto) in $\mathbb{C}^*$;

(d) il gruppoide quoziente $\Big(\mathbb{C}^*\big/\!\simeq\,;\,\cdot\Big)$ è isomorfo al gruppoide $\big(S^1\,;\,\cdot\,\big)$.

<u>Suggerimento</u>: *Si può dimostrare tutto con un approccio diretto. D'altra parte, si può invece ottenere tutto come conseguenza dei risultati dell'Esercizio 30 qui sopra, osservando che* $\simeq$ *coincide con l'equivalenza associata al morfismo* $\kappa : \big(\mathbb{C}^*\,;\,\cdot\,\big) \longrightarrow \big(\mathbb{C}^*\,;\,\cdot\,\big)$.

33 — Definiamo in $\mathbb{R}$ la relazione $\overset{\mathbb{Z}}{\simeq}$ data da $r' \overset{\mathbb{Z}}{\simeq} r'' \iff r' - r'' \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che:

(a) la relazione $\overset{\mathbb{Z}}{\simeq}$ è compatibile con l'operazione $+$ in $\mathbb{R}$;

(b) la relazione $\overset{\mathbb{Z}}{\simeq}$ *non* è compatibile con l'operazione $\cdot$ in $\mathbb{R}$.

34 — Sia $(K\,;*)$ un gruppoide. Verificare che la funzione identità id_K è un automorfismo di $(K\,;*)$.

35 — Siano $(H\,;*) \xrightarrow{\ \phi\ } (K\,;\bullet)$ e $(K\,;\bullet) \xrightarrow{\ \phi\ } (\Gamma\,;\star)$ due morfismi tra gruppoidi. Dimostrare che la funzione composta $(H\,;*) \xrightarrow{\ \psi\circ\phi\ } (\Gamma\,;*)$ è a sua volta un morfismo dal gruppoide $(H\,;*)$ al gruppoide $(\Gamma\,;\star)$.

36 — Sia $(H\,;*) \xrightarrow{\ \phi\ } (K\,;\star)$ un morfismo tra gruppoidi. Ricordiamo che ϕ si dice *isomorfismo* se esiste un morfismo in senso inverso $(H\,;*) \xleftarrow{\ \varphi\ } (K\,;\star)$ tale che $\varphi \circ \phi = id_H$ e $\phi \circ \varphi = id_K$.

Dimostrare che per ogni morfismo tra gruppoidi $(H\,;*) \xrightarrow{\ \phi\ } (K\,;\star)$ le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) ϕ è isomorfismo;

(b) ϕ è invertibile (come funzione);

(c) ϕ è biiettivo (come funzione).

In conseguenza, si dimostri anche che se $(H\,;*) \xrightarrow{\ \phi\ } (K\,;\star)$ è isomorfismo allora il "morfismo inverso" $(H\,;*) \xleftarrow{\ \varphi\ } (K\,;\star)$ coincide con la funzione inversa f^{-1} .

<u>Suggerimento:</u> *Le implicazioni (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) sono immediate, e così anche l'implicazione (b) $\Longleftarrow$ (c). Per concludere basta dimostrare l'implicazione (a) $\Longleftarrow$ (b): per questa basta provare che, se esiste la funzione $\phi^{-1} : K \longrightarrow H$ inversa di ϕ, allora (poiché ϕ è un morfismo) questa è a sua volta un morfismo.*

37 — Dato un gruppoide $(K\,;*)$, sia $End(K\,;*)$ l'insieme dei suoi *endomorfismi* e $Aut(K\,;*)$ l'insieme dei suoi *endomorfismi*. Dimostrare che:

(a) $\big(End(K\,;*)\,;\circ\big)$ è un monoide;

(b) $\big(Aut(K\,;*)\,;\circ\big)$ è un gruppo.

<u>Suggerimento:</u> *Tutto segue dagli Esercizi 33, 34 e 35 qui sopra.*

38 — Sia $\big(M\,; *\big) \xrightarrow{\ \phi\ } \big(N\,; \star\big)$ un morfismo di monoidi che manda l'elemento neutro di $\big(M\,; *\big)$ nell'elemento neutro di $\big(N\,; \star\big)$ — in formule, $\phi(1_M) = 1_N$. Dimostrare che:

(a) $\phi\big(m^{-1}\big) = \phi(m)^{-1}$ per ogni $m \in U\big(M\,; *\big)$;

(b) $\phi\big(U\big(M\,; *\big)\big) \subseteq U\big(N\,; \star\big)$.

<u>Suggerimento:</u> *La parte (b) segue direttamente dalla parte (a), e per quest'ultima basta una verifica diretta.*

39 — Sia $\phi : \big(K\,; \star\big) \longrightarrow \big(\varGamma\,; *\big)$ un morfismo di gruppoidi. Supponiamo che ϕ sia un *isomorfismo*. Dimostrare che allora si ha:

(a) $\big(K\,; \star\big)$ è commutativo $\iff$ $\big(\varGamma\,; *\big)$ è commutativo;

(b) $\big(K\,; \star\big)$ è un semigruppo $\iff$ $\big(\varGamma\,; *\big)$ è un semigruppo;

(c) $\big(K\,; \star\big)$ è un monoide $\iff$ $\big(\varGamma\,; *\big)$ è un monoide;

(d) $\big(K\,; \star\big)$ è un gruppo $\iff$ $\big(\varGamma\,; *\big)$ è un gruppo.

40 — Per ogni insieme E con $|E| > 1$, si dimostri (notazione dell'**Esercizio 2**) che:

(a) il monoide (abeliano) $\big(\mathcal{P}(E)\,; \cap\big)$ *non* è cancellativo;

(b) il monoide (abeliano) $\big(\mathcal{P}(E)\,; \cup\big)$ *non* è cancellativo;

(c) il monoide $\big(\mathcal{R}(E)\,; \circ\big)$ *non* è cancellativo (né a destra, né a sinistra);

(d) il monoide $\big(E^E\,; \circ\big)$ *non* è cancellativo (né a destra, né a sinistra);

<u>Suggerimento:</u> *Le parti (a) e (b) sono del tutto simili, e molto semplici. Per il resto, poiché* $\mathcal{R}(E) \supseteq E^E$ *, la parte (c) è conseguenza della (d), e quindi ci basta dimostrare quest'ultima; a tal fine, cerchiamo applicazioni* $h, k, \ell \in E^E$ *tali che* $h \circ \ell = k \circ \ell$ *ma* $h \neq k$ *, e altre applicazioni* $f, b, t \in E^E$ *tali che* $f \circ b = f \circ t$ *ma* $b \neq t$ *.*

41 — Dato un semigruppo cancellativo abeliano $\big(S\,; *\big)$, sia $G\big(S\,; *\big)$ il *gruppo* abeliano ad esso canonicamente associato come "gruppo delle frazioni". Verificare che:

(a) $G\big(\mathbb{N}; +\big) = \big(\mathbb{Z}; +\big)$;

(b) $G\big(\mathbb{N}_+\,; \cdot\big) = \big(\mathbb{Q}_+\,; \cdot\big)$;

(c) $G\big(\mathbb{Z}^*\,; \cdot\big) = \big(\mathbb{Q}^*\,; \cdot\big)$, dove $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, e $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

42 — Sia S un semigruppo cancellativo abeliano, e sia $G(S)$ il relativo "gruppo delle frazioni" (come nell'**Esercizio 41** qui sopra); ogni elemento di $G(S)$ è una classe di η–equivalenza di coppie in $S \times S$, che indichiamo con $s_1/s_2 := \big[(s_1, s_2)\big]_\eta$.

Dimostrare che, per ogni $s \in U(S)$ — cioè s è *invertibile* in S — con inverso $s^{-1} \in S$, vale in $G(S)$ l'identità $1/s = s^{-1}/1$.

43 — Sia $\big(M\,;\,*\big)$ un monoide cancellativo abeliano, con elemento neutro $e_{\scriptscriptstyle M}$, e supponiamo che $M_\circ := M \setminus \big\{e_{\scriptscriptstyle M}\big\}$ sia chiuso per l'operazione $*$, cioè $m' * m'' \in M_\circ$ per ogni $m', m'' \in M_\circ$, così che $\big(M_\circ\,;\,*\big)$ è a sua volta un semigruppo. Siano $G(M)$ e $G(M_\circ)$ i relativo "gruppi delle frazioni" (come nell'**Esercizio 41** qui sopra).

Dimostrare che esiste un isomorfismo di gruppi $\phi : G(M_\circ) \longrightarrow G(M)$ dato da $m'/m'' \mapsto \phi\big(m'/m''\big) := m'/m''$, dove la frazione di sinistra va intesa come elemento di $G(M_\circ)$ e quella di destra come elemento di $G(M)$.

Suggerimento: *Attenzione che le "frazioni" in $G(M_\circ)$ e in $G(M)$ sono classi di equivalenza costruite in insiemi diversi: nel primo caso, equivalenza in $M_\circ \times M_\circ$, nel secondo equivalenza in $M \times M$. Quindi, per prima cosa bisogna dimostrare che ϕ sia ben definito, cioè che se per $m'_1/m''_1, m'_2/m''_2 \in G(M)$ si ha $m'_1/m''_1 = m'_2/m''_2$ in $G(M)$, allora è anche $m'_1/m''_1 = m'_2/m''_2$ in $G(M_\circ)$ — cioè se è $\big(m'_1, m''_1\big)\eta\big(m'_2, m''_2\big)$ in $M \times M$ allora è anche $\big(m'_1, m''_1\big)\eta\big(m'_2, m''_2\big)$ in $M_\circ \times M_\circ$. In seguito, dimostrare che tale ϕ sia un morfismo è ovvio; e perché ϕ sia un* isomorfismo *è necessario e sufficiente che sia biiettivo.*

L'iniettività è problema analogo a quello appena visto, e si tratta allo stesso modo. Per la suriettività, ci si riduce a provare che tutte le frazioni del tipo $m/e_{\scriptscriptstyle M}$ e $e_{\scriptscriptstyle M}/m$ sono anch'esse nell'immagine di ϕ ; questo segue dal dimostrare che in $G(M)$ valgono le identità $m/e_{\scriptscriptstyle M} = (m*\mu)/\mu$, $e_{\scriptscriptstyle M}/m = \mu/(m*\mu)$ (con $\mu \in M_\circ$ qualsiasi!) per ogni $m \in M_\circ$, e $e_{\scriptscriptstyle M}/e_{\scriptscriptstyle M} = \mu/\mu$ (con $\mu \in M_\circ$ qualsiasi!).

44 — Posto $\mathbb{N}_+ := \big\{\, n\in\mathbb{N} \,\big|\, n > 0 \big\}$, $\mathbb{N}_{>1} := \big\{\, n\in\mathbb{N} \,\big|\, n > 1 \big\}$, $\mathbb{Q}_+ := \big\{\, q\in\mathbb{Q} \,\big|\, q > 0 \big\}$, si dimostri che

$$G\big(\mathbb{N}\,;+\big) = G\big(\mathbb{N}_+\,;+\big) = \big(\mathbb{Z}\,;+\big) \quad , \qquad G\big(\mathbb{N}_+\,;\cdot\big) = G\big(\mathbb{N}_{>1}\,;\cdot\big) = \big(\mathbb{Q}_+\,;\cdot\big)$$

Suggerimento: *Segue come diretta applicazione dell'Esercizio 43 qui sopra tenendo i risultati nell'Esercizio 41(a)–(b); ma si provi a (ri)dimostrarlo direttamente.*