ESERCIZI DI ALGEBRA
— GRUPPI SIMMETRICI, GRUPPI DIEDRALI —

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— * —

1 — Siano $g = (1\,5\,2\,6)(3\,4\,7)$ e $h = (1\,5)(2\,3\,7\,6)$ due permutazioni su 7 elementi. Calcolare la permutazione $h \circ g^{-1}$, descrivendola sia in notazione matriciale che tramite la sua decomposizione ciclica.

2 — Siano $\alpha = (2\,3)$ e $\beta = (1\,3)(2\,4\,5)$ due permutazioni su 5 elementi. Calcolare le permutazioni $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, α^{-1} e β^{-1}, descrivendo ciascuna di esse sia in notazione matriciale che tramite la sua decomposizione ciclica.

3 — Siano $\alpha = \binom{1\,2\,3\,4\,5}{5\,3\,4\,2\,1}$ e $\beta = \binom{1\,2\,3\,4\,5}{4\,1\,3\,5\,2}$ e $\gamma = \binom{1\,2\,3\,4\,5}{1\,3\,2\,5\,4}$ tre permutazioni su 5 elementi. Calcolare le permutazioni $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha$, $\alpha^2 \circ \gamma$ e $\gamma \circ \alpha^{-1}$, descrivendo ciascuna di esse sia in notazione matriciale che tramite la sua decomposizione ciclica.

4 — Siano $\alpha = \binom{1\,2\,3\,4}{2\,3\,4\,1}$ e $\beta = \binom{1\,2\,3\,4}{1\,3\,2\,4}$ due permutazioni su 4 elementi. Calcolare le permutazioni $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, $\beta \circ \alpha^2$, $(\beta \circ \alpha)^2$ e $\alpha^3 \circ \beta \circ \alpha$, descrivendo ciascuna di esse sia in notazione matriciale che tramite la sua decomposizione ciclica.

5 — Siano $\alpha = (1\,3\,2\,5)$, $\beta = (1\,3)(4\,5)$ e $\gamma = (2\,3)(4\,5)$ tre permutazioni su 5 elementi. Calcolare le permutazioni $\beta \circ \alpha$, $\gamma \circ \alpha$, $\gamma \circ \beta \circ \alpha$, $\alpha \circ \beta \circ \gamma$, $\beta \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha$, descrivendo ciascuna di esse sia in notazione matriciale che tramite la sua decomposizione ciclica.

6 — Descrivere esplicitamente la classe di coniugazione (nei rispettivi gruppi simmetrici) delle permutazioni

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_5 \ , \qquad \sigma'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_6$$

7 — Sia $n \in \mathbb{N}_+$ e siano $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$. Dimostrare che la partizione associata a $\sigma \circ \tau$ data dalle lunghezze dei cicli nella sua decomposizione in cicli disgiunti e l'analoga partizione associata a $\tau \circ \sigma$ coincidono.

8 — Per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, indichiamo con D_n il gruppo diedrale su n elementi, con R_n il suo sottogruppo delle *rotazioni*, e con Σ_n il suo sottoinsieme delle *riflessioni*. Dimostrare che

$$R_n \circ \Sigma_n \subseteq \Sigma_n \ , \quad \Sigma_n \circ R_n \subseteq \Sigma_n \ , \quad \Sigma_n \circ \Sigma_n \subseteq R_n$$

9 — Per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, indichiamo con D_n il gruppo diedrale su n elementi, con R_n il suo sottogruppo delle *rotazioni*, e con Σ_n il suo sottoinsieme delle *riflessioni*. Dimostrare che

$$\tau \circ \rho \ = \ \rho^{-1} \circ \tau \qquad\qquad \forall \ \tau \in \Sigma_n \, , \ \rho \in R_n$$

10 — Per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, indichiamo con D_n il gruppo diedrale su n elementi e con $Z(D_n)$ il suo *centro*.

(a) Calcolare $Z(D_6)$, $Z(D_{10})$ e $Z(D_{10})$.

(b) Calcolare $Z(D_n)$ per ogni $n \geq 3$.

11 — Sia D_n il gruppo diedrale su n elementi, R_n il suo sottogruppo delle *rotazioni*, e Σ_n il suo sottoinsieme delle *riflessioni*. Considerando D_n — realizzato come gruppo degli automorfismi del grafo ciclico con n vertici — come sottogruppo del gruppo simmetrico $\mathcal{S}_n$, si descrivano (come permutazioni, in notazione matriciale e tramite decomposizione ciclica) i seguenti elementi di D_n:

(a) l'unica *riflessione* $\tau \in \Sigma_{12}$ tale che $\tau(5) = 11$;

(b) l'unica *riflessione* $\tau \in \Sigma_{15}$ tale che $\tau(3) = 12$;

(c) l'unica *rotazione* $\rho \in R_{14}$ tale che $\rho(9) = 6$;

(d) l'unica *riflessione* $\tau \in \Sigma_n$ tale che $\tau(1) = n$, per n *pari* arbitrario;

(e) l'unica *riflessione* $\tau \in \Sigma_n$ tale che $\tau(1) = n$, per n *dispari* arbitrario.

12 — Calcolare in quanti modi distinti si possano colorare i lati di un ottagono regolare così che quattro lati siano gialli e quattro rossi.

13 — Calcolare il numero di bracciali distinti che si possono formare con 3 perle nere, 4 perle gialle e 5 perle rosse.

14 — Calcolare il numero di bracciali distinti che si possono formare con 3 perle verdi, 5 perle rosse e 7 perle azzurre.