ESERCIZI DI ALGEBRA — G–SPAZI

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— $*$ —

1 — Sia G un gruppo e S un G–spazio, con azione indicata da $(g,s) \mapsto g.s$. Denotiamo

— *(a)* $\mathcal{P}(S)$ l'insieme delle parti di S ,

— *(b)* $\mathcal{P}_{f}(S)$ l'insieme delle parti *finite* di S, cioè quelle aventi cardinalità finita,

— *(c)* $\mathcal{P}_{\kappa}(S)$ l'insieme delle parti di S aventi cardinalità pari a κ , per ogni fissata cardinalità κ minore o uguale di quella di S ,

— *(d)* $\Pi(S)$ l'insieme delle partizioni di S .

Dimostrare che le funzioni $\sigma_{\mathcal{P}(S)} : G \times \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$, $\sigma_{\mathcal{P}_{\kappa}(S)} : G \times \mathcal{P}_{f}(S) \longrightarrow \mathcal{P}_{f}(S)$, $\sigma_{\mathcal{P}_{\kappa}(S)} : G \times \mathcal{P}_{\kappa}(S) \longrightarrow \mathcal{P}_{\kappa}(S)$ e $\sigma_{\Pi(S)} : G \times \Pi(S) \longrightarrow \Pi(S)$ definite rispettivamente da $\sigma_{\mathcal{P}(S)}\big(g\,,S'\big) := \big\{\, g.s' \,\big|\, s' \in S' \big\}$, $\sigma_{\mathcal{P}_{f}(S)} := \sigma_{\mathcal{P}(S)}\Big|_{G \times \mathcal{P}_{f}(S)}$, $\sigma_{\mathcal{P}_{\kappa}(S)} := \sigma_{\mathcal{P}(S)}\Big|_{G \times \mathcal{P}_{\kappa}(S)}$ e $\sigma_{\Pi(S)}\big(g\,,\{\pi_i\}_{i \in I}\big) := \big\{\sigma_{\mathcal{P}(S)}\big(g,\pi_i\big)\big\}_{i \in I}$, sono tutte G–azioni (rispettivamente su $\mathcal{P}(S)$, su $\mathcal{P}_{f}(S)$, su $\mathcal{P}_{\kappa}(S)$ e su $\Pi(S)$).

2 — Sia G un gruppo, S e T due G–spazi e E un insieme. Dimostrare che:

(a) l'insieme S^E delle funzioni da E ad S è un G–spazio per l'azione definita da

$$(g,f) \mapsto g.f\,\big(\, e \mapsto (\,g.f)(e) := g.\big(\,f(e)\big)\,\big) \qquad \forall\, g \in G\,,\ f \in S^E\,,\ e \in E \ \ ;$$

(b) l'insieme E^T delle funzioni da T ad E è un G–spazio per l'azione definita da

$$(g,f) \mapsto g.f\,\big(\, e \mapsto (\,g.f)(t) := f\big(\,g^{-1}.\,t\big)\,\big) \qquad \forall\, g \in G\,,\ f \in E^T\,,\ t \in T \ \ ;$$

(c) l'insieme S^T delle funzioni da T ad S è un G–spazio per l'azione definita da

$$(g,f) \mapsto g.f\,\big(\, t \mapsto (\,g.f)(t) := g.\big(\,f\big(\,g^{-1}.\,t\big)\big)\,\big) \qquad \forall\, g \in G\,,\ f \in S^T\,,\ t \in T \ \ ;$$

(d) gli esempi di G–spazi della forma S^E come in *(a)* oppure E^T come in *(b)* sono casi particolari di quelli della forma S^T come in *(c)*.

3 — Dato un gruppo G e un sottogruppo H di G , verificare che le funzioni

$$G \times G\big/H \longrightarrow G\big/H \ , \quad \big(\,g\,,\gamma H\,\big) \mapsto g.(\gamma H) := (g\,\gamma)H$$

$$G \times H\big\backslash G \longrightarrow H\big\backslash G \ , \quad \big(\,g\,,H\gamma\,\big) \mapsto g.(H\gamma) := H\big(\gamma g^{-1}\big)$$

sono G–azioni (su $G\big/H$ e $H\big\backslash G$ rispettivamente), e che tali azioni sono transitive.

4 — <u>*Azioni per automorfismi:*</u> Siano G un gruppo e $\varGamma$ un G–spazio, con azione indicata da $\sigma(g,\gamma) = g.\gamma$ e corrispondente rappresentazione $\psi : G \longrightarrow \mathcal{S}(\varGamma)$. Supponiamo inoltre che $\varGamma$ sia anche un gruppoide, per una certa operazione $*$. Dimostrare che le due seguenti proprietà sono equivalenti (nel qual caso si dice che "*G agisce sul gruppoide $\big(\varGamma\,;*\big)$ per automorfismi*" — o anche "*tramite automorfismi*"):

(a) $g.(\gamma_1 * \gamma_2) = (g.\gamma_1) * (g.\gamma_2)$ per ogni $g \in G\,,\ \gamma_1, \gamma_2 \in \varGamma$;

(b) $\psi(G) \subseteq Aut_{\mathcal{G}d}\big(\varGamma\,;*\big)$, cioè l'immagine di ψ è contenuta nel gruppo $Aut_{\mathcal{G}d}\big(\varGamma\,;*\big)$ degli automorfismi del gruppoide $\big(\varGamma\,;*\big)$.

5 — <u>*G–sottospazi:*</u> Siano G un gruppo, S un G–spazio e S' un sottoinsieme non vuoto di S . Dimostrare che le due seguenti proprietà sono equivalenti (nel qual caso si dice che "*S' è un G–sottospazio di S*"):

(a) $g.s' \in S'$ per ogni $g \in G\,,\ s' \in S'$;

(b) S' è unione di G–orbite.

6 — Siano $\big(G\,;\cdot\big)$ e $\big(\varGamma\,;*\big)$ due gruppi, e supponiamo che G agisca su $\varGamma$ per automorfismi (nel senso dell'esercizio 4 qui sopra). Si considerino poi l'insieme $\mathcal{P}(\varGamma)$ delle parti di $\varGamma$, l'insieme $\mathcal{S}_\varGamma$ dei sottogruppi di $\varGamma$ e l'insieme $\mathcal{N}_\varGamma$ dei sottogruppi normali di $\varGamma$, per cui $\mathcal{N}_\varGamma \subseteq \mathcal{S}_\varGamma \subseteq \mathcal{P}(\varGamma)$. Si consideri poi l'azione di G su $\mathcal{P}(\varGamma)$ canonicamente indotta dall'azione di G su $\varGamma$ (come nell'esercizio 1 qui sopra). Dimostrare allora che:

(a) $\mathcal{S}_\varGamma$ è G–sottospazio di $\mathcal{P}(\varGamma)$;

(b) $\mathcal{N}_\varGamma$ è G–sottospazio di $\mathcal{S}_\varGamma$.

7 — Sia G un gruppo e A un anello, e supponiamo che G agisca su A per automorfismi (nel senso dell'esercizio 4 qui sopra) rispetto a entrambe le operazioni di A ; in altre parole, la rappresentazione di G in A ha valori nel gruppo $Aut_{\mathcal{A}}\big(A\,;+\,,\,\cdot\big)$ degli automorfismi d'anello di A . Dimostrare allora che:

(a) il centro $Z(A)$ di A è un G–sottospazio di A ;

(b) l'insieme $\mathcal{N}(A)$ degli elementi nilpotenti di A è un G–sottospazio di A ;

(c) se A è unitario, allora il gruppo $U(A)$ degli invertibili di A è G–sottospazio di A .

Si considerino poi gli insiemi $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{I}_A^s$, $\mathcal{I}_A^d$ e $\mathcal{I}_A$ rispettivamente delle parti, dei sottoanelli, degli ideali sinistri, degli ideali destri, degli ideali (bilateri) di A . Si consideri poi la G–azione su $\mathcal{P}(\varGamma)$ canonicamente indotta dalla G–azione su A (come nell'esercizio 1 qui sopra). Dimostrare allora che:

(d) $\mathcal{S}_A$ è G–sottospazio di $\mathcal{P}(A)$;

(e) $\mathcal{I}_A^s$ e $\mathcal{I}_A^d$ sono G–sottospazi di $\mathcal{S}_A$;

(f) $\mathcal{I}_A$ è G–sottospazio di $\mathcal{I}_A^s$ e di $\mathcal{I}_A^d$.

8 — Sia $\big(A\,;+\,,\,\cdot\big)$ un anello unitario, e sia $G := U(A)$ il gruppo (moltiplicativo) degli elementi invertibili di A. Dimostrare che:

(a) le formule

$$G \times A \longrightarrow A\,, \quad \big(g\,,a\big) \mapsto g.a := g\,a$$
$$G \times A \longrightarrow A\,, \quad \big(g\,,a\big) \mapsto g.a := a\,g^{-1}$$
$$G \times A \longrightarrow A\,, \quad \big(g\,,a\big) \mapsto g.a := g\,a\,g^{-1}$$

definiscono G–azioni su A — dette rispettivamente *"azione regolare sinistra"*, *"azione regolare destra"*, *"azione per coniugazione"* (le cui orbite si dicono *"classi di coniugio"* di A).

(b) le azioni regolari sinistra e destra sono azioni *per automorfismi del gruppo* $\big(A\,;+\big)$;

(c) l'azione per coniugazione è un'azione *per automorfismi dell'anello* $\big(A\,;+\,,\,\cdot\big)$;

(d) ogni ideale sinistro è un G–sottospazio di A rispetto all'azione regolare sinistra;

(e) ogni ideale destro è un G–sottospazio di A rispetto all'azione regolare destra;

(f) ogni ideale (bilatero) è un G–sottospazio di A rispetto all'azione per coniugazione.

9 — Sia $\mathbb{K}$ un campo, sia $M := Mat_{\ell,n}(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrice $\ell \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ — che è gruppo rispetto alla somma coefficiente per coefficiente — e per ogni $s \in \{\ell, n\}$ sia $G_s := GL_r(\mathbb{K})$ il gruppo (generale lineare) delle matrici $s \times s$ invertibili a coefficienti in $\mathbb{K}$ (col prodotto righe per colonne).

(a) Dimostrare che le formule (in cui "$\cdot$" rappresenta il prodotto righe per colonne)

$$G_\ell \times M \longrightarrow M\,, \quad \big(g\,,m\big) \mapsto g.a := g \cdot a$$
$$G_n \times M \longrightarrow M\,, \quad \big(g\,,m\big) \mapsto g.a := a \cdot g^{-1}$$

definiscono rispettivamente una G_ℓ–azione e una G_n–azione su M.

(b) Verificare che le due azioni di cui al punto *(a)* sono entrambe azioni *per automorfismi* del gruppo $\big(M\,;+\big)$, nel senso dell'esercizio 4 qui sopra.

(c) Verificare che se due matrici M' e M'' sono in una stessa G_ℓ–orbita, rispettivamente in una stessa G_n–orbita, allora hanno lo stesso rango-righe, rispettivamente lo stesso rango-colonne.

(d) Descrivere esplicitamente le G_ℓ–orbite e le G_n–orbite in M.

(e) Descrivere esplicitamente (cioè metterli in biiezione con un insieme descritto esplicitamente) gli spazi $M\big/G_\ell$ e $M\big/G_n$ rispettivamente delle G_ℓ–orbite e delle G_n–orbite.

<u>Suggerimento</u>: *Per i punti (c–e) si ricordi la possibilità di effettuare "riduzioni a scala" (superiori o inferiori, per righe o per colonne) di ogni matrice in M; tali forme a scala (di tipo fissato) possono esser prese come rappresentanti "canonici" delle varie orbite...*

10 ☡ — Sia $A := Mat_n(\mathbb{C})$ l'anello unitario delle matrici $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, sia $\mathcal{N}(A)$ il corrispondente insieme degli elementi nilpotenti e sia $G := U(A) = U\big(Mat_n(\mathbb{C})\big) = GL_n(\mathbb{C})$ il corrispondente gruppo degli elementi invertibili.

Come nell'esercizio 8 qui sopra, consideriamo l'azione per coniugazione di G su A, che fa di A un G–spazio del quale $\mathcal{N}(A)$ è un G–sottospazio. Inoltre, per ogni $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ sia $A_r := \big\{\, M \in A \,\big|\, \|m\| = r \,\big\}$ il sottoinsieme di A formato dalle matrici di rango r.

(a) Dimostrare — per ogni $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ — che A_r è G–sottospazio di A;

(b) ☡ Descrivere esplicitamente ciascuna G–orbita in $\mathcal{N}(A)$;

(c) ☡ Descrivere esplicitamente lo spazio $\mathcal{N}(A)\big/G$ delle G–orbite in $\mathcal{N}(A)$;

(d) ☡☡ Descrivere esplicitamente ciascuna G–orbita in A;

(e) ☡☡ Descrivere esplicitamente lo spazio $A\big/G$ delle G–orbite in A.

Suggerimento: *Si ricordi che ogni matrice in A può essere ridotta a "forma canonica di Jordan"; tali forme canoniche possono esser prese come rappresentanti ("canonici") delle varie G–orbite. Nel caso di una matrice nilpotente, la forma di Jordan corrispondente ha un aspetto particolare, ecc. ecc.*

11 — Calcolare il numero di anagrammi possibili per ciascuna delle tre parole "PEPPE", "GIORGIO" e "COCCOLALO".

12 — Calcolare il numero di bracciali (diversi) che si possono realizzare in ciascuno dei due modi seguenti:

(a) usando esattamente 7 perle bianche e 5 nere;

(b) usando esattamente 5 perle bianche, 3 nere e 4 rosse.