ESERCIZI SU
EQUAZIONI CONGRUENZIALI E MODULARI

N.B.: il simbolo $\diamond$ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— * —

- 1** — Calcolare tutte le soluzioni della equazione congruenziale $259x \equiv 16 \pmod{11}$.
- 2** — Calcolare tutte le soluzioni della equazione congruenziale $7x \equiv 5 \pmod{256}$.
- 3** — Calcolare tutte le soluzioni della equazione congruenziale $73x \equiv -101 \pmod{35}$.
- 4** — Scrivere un sistema di equazioni tre congruenziali che *non* ammetta soluzioni (interi) sebbene se le sue singole equazioni (separatamente) ne ammettano.
- 5** — È vero che ogni soluzione (intera) dell'equazione congruenziale $14x \equiv 0 \pmod{24}$ è anche soluzione dell'equazione congruenziale $7x \equiv 0 \pmod{12}$? È vero il viceversa?
- 6** — È vero che ogni soluzione (intera) dell'equazione congruenziale $14x \equiv 2 \pmod{24}$ è anche soluzione dell'equazione congruenziale $7x \equiv 1 \pmod{12}$? È vero il viceversa?
- 7** — Calcolare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali seguente:

$$\diamond : \begin{cases} 21x \equiv -93 & (\text{mod } 4) \\ -11x \equiv 39 & (\text{mod } 7) \\ 6179x \equiv 983 & (\text{mod } 3) \\ 71x \equiv 52 & (\text{mod } 5) \end{cases}$$

- 8** — Calcolare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali seguente:

$$\diamond : \begin{cases} 79x \equiv 91 & (\text{mod } 8) \\ -81x \equiv -129 & (\text{mod } 7) \\ 39x \equiv 132 & (\text{mod } 15) \end{cases}$$

9 — Calcolare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z}$ del sistema di equazioni congruenziali

$$\textcircled{*} : \begin{cases} 17x \equiv -105 \pmod{5} \\ -55x \equiv 11 \pmod{3} \\ 23x \equiv 36 \pmod{7} \end{cases}$$

10 — Verificare che il seguente sistema di equazioni congruenziali

$$\textcircled{*} : \begin{cases} 3x \equiv 7 \pmod{10} \\ 3x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

ha esattamente dieci soluzioni x tali che $0 \leq x \leq 100$.

11 — Determinare tutti gli interi positivi con tre cifre decimali che soddisfano il sistema di equazioni congruenziali

$$\textcircled{*} : \begin{cases} 5x \equiv 13 \pmod{11} \\ 31x \equiv -12 \pmod{5} \end{cases}$$

12 — Risolvere il sistema di equazioni congruenziali

$$\textcircled{*} : \begin{cases} -25x \equiv 14^{64938} \pmod{11} \\ 47x \equiv 436 \pmod{6} \end{cases}$$

13 — Determinare tutti i numeri interi $x \in \mathbb{Z}$ per i quali si abbia simultaneamente $[63]_{105} \cdot [x]_{105} = [189]_{105}$ in $\mathbb{Z}_{105}$ e $317x \equiv -49 \pmod{20}$ in $\mathbb{Z}$.

Suggerimento: Risolvere il problema equivale a risolvere un opportuno sistema di equazioni congruenziali...

14 — Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, si indichino con $[z]_{11} \in \mathbb{Z}_{11}$ e $[z]_{12} \in \mathbb{Z}_{12}$ le sue classi di congruenza rispettivamente modulo 11 e modulo 12.

Determinare l'insieme di tutti numeri interi $z \in \mathbb{Z}$ tali che $[z]_{11}$ e $[z]_{12}$ siano soluzione rispettivamente — e simultaneamente — delle due equazioni modulari

$$[8]_{11} [x]_{11} = [5]_{11} \quad (\text{in } \mathbb{Z}_{11}) \quad \text{e} \quad [10]_{12} [x]_{12} = [4]_{12} \quad (\text{in } \mathbb{Z}_{12})$$

Suggerimento: Risolvere il problema equivale a risolvere un opportuno sistema di equazioni congruenziali...

15 $\diamond$ — “Evoluzione” del Teorema Cinese del Resto

Per ogni $r, s \in \mathbb{N}$ con $r, s > 1$, si consideri la funzione $f'_{r,s} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ definita da $z \mapsto f'_{r,s}(z) := ([z]_r, [z]_s)$ — per ogni $z \in \mathbb{Z}$ — dove $[z]_n := [z]_{\equiv n}$ è la classe di congruenza modulo n di z .

(a) Dimostrare che la funzione $f'_{r,s} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ induce univocamente una funzione $f_{r,s} : \mathbb{Z}_{\text{m.c.m.}(r,s)} \longrightarrow \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ tale che $f_{r,s} \circ \pi = f'_{r,s}$, dove $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\text{m.c.m.}(r,s)}$ è la proiezione canonica.

(b) Descrivere esplicitamente la funzione $f_{r,s} : \mathbb{Z}_{\text{m.c.m.}(r,s)} \longrightarrow \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ del punto (a).

(c) Dimostrare che la funzione $f_{r,s} : \mathbb{Z}_{\text{m.c.m.}(r,s)} \longrightarrow \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ del punto (a) è iniettiva.

(d) Dimostrare che la funzione $f_{r,s} : \mathbb{Z}_{\text{m.c.m.}(r,s)} \longrightarrow \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ del punto (a) rispetta le operazioni di somma e prodotto (in $\mathbb{Z}_{\text{m.c.m.}(r,s)}$ e in $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$) — cioè “trasforma somma in somma” e “trasforma prodotto in prodotto”.

Suggerimento: Le parti (a), (b) e (c) si possono ottenere applicando il Teorema Fondamentale delle Applicazioni. La parte (d) segue da una verifica diretta.

16 $\diamond$ — “Evoluzione” del Teorema Cinese del Resto — versione moltiplicativa

Per ogni $r, s \in \mathbb{N}$ con $r, s > 1$, sia $f_{r,s} : \mathbb{Z}_{\text{m.c.m.}(r,s)} \longrightarrow \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ la funzione introdotta nell'esercizio **15** qui sopra.

(a) Dimostrare che $f_{r,s}(U(\mathbb{Z}_{\text{m.c.m.}(r,s)})) \subseteq U(\mathbb{Z}_r) \times U(\mathbb{Z}_s)$, così che la restrizione di $f_{r,s}$ definisce una funzione $f_{r,s}^U : U(\mathbb{Z}_{\text{m.c.m.}(r,s)}) \longrightarrow U(\mathbb{Z}_r) \times U(\mathbb{Z}_s)$.

(b) Dimostrare che la funzione $f_{r,s}^U : U(\mathbb{Z}_{\text{m.c.m.}(r,s)}) \longrightarrow U(\mathbb{Z}_r) \times U(\mathbb{Z}_s)$ di cui al punto (a) è iniettiva.

(c) Dimostrare che $f_{r,s}^U(U(\mathbb{Z}_{\text{m.c.m.}(r,s)})) = f_{r,s}(\mathbb{Z}_{\text{m.c.m.}(r,s)}) \cap (U(\mathbb{Z}_r) \times U(\mathbb{Z}_s))$.

Suggerimento: Per la parte (a), si osservi che se $[z]_{\text{m.c.m.}(r,s)} \in U(\mathbb{Z}_{\text{m.c.m.}(r,s)})$ ha inverso $[\zeta]_{\text{m.c.m.}(r,s)}$ — anch'esso in $U(\mathbb{Z}_{\text{m.c.m.}(r,s)})$ — allora la coppia $f_{r,s}([\zeta]_{\text{m.c.m.}(r,s)})$ è inversa (nel senso ovvio) della coppia $f_{r,s}([z]_{\text{m.c.m.}(r,s)})$ in $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$, da cui si conclude...

La parte (b) segue dall'esercizio **15**(b) qui sopra.

Per la parte (c), l'inclusione “ $\subseteq$ ” è data da (a). L'inclusione opposta “ $\supseteq$ ” segue invece da una verifica diretta.

17 — (a) Determinare se esista la classe $\bar{6}^{-1}$ inversa di $\bar{6}$ in $\mathbb{Z}_{30}$ e in $\mathbb{Z}_{31}$. In ciascun caso, se la risposta è positiva si calcoli esplicitamente la classe inversa $\bar{6}^{-1}$.

(b) Risolvere l'equazione modulare $\bar{96} \bar{x} = \bar{21}$ nell'anello $\mathbb{Z}_{30}$.

(c) Risolvere l'equazione modulare $\bar{37} \bar{x} = \bar{29}$ nell'anello $\mathbb{Z}_{31}$.

18 — (a) Calcolare, se esiste, la classe $\bar{z}^{-1} \in \mathbb{Z}_{100}$ inversa della classe $\bar{z} \in \mathbb{Z}_{100}$ per i casi $z := 56$ e $z := 369$. Se invece tale classe non esiste, se ne spieghi il perché.

(b) Risolvere l'equazione $-\overline{131} \cdot \bar{x} = \overline{273}$ in $\mathbb{Z}_{100}$.

19 — Risolvere, se possibile, ciascuna delle tre equazioni modulari seguenti:

$$\bar{6} \cdot \bar{x} = \bar{28} \text{ in } \mathbb{Z}_{10}, \quad \bar{6} \cdot \bar{x} = \bar{13} \text{ in } \mathbb{Z}_{10}, \quad \bar{45} \cdot \bar{x} = \bar{6} \text{ in } \mathbb{Z}_{23}.$$

20 — (a) Calcolare — se esiste — la classe $\bar{z}^{-1} \in \mathbb{Z}_{100}$ inversa della classe $\bar{z} \in \mathbb{Z}_{100}$ per i casi $z := 65$ e $z := -137$.

(b) Risolvere l'equazione $\overline{237} \cdot \bar{x} = \overline{181}$ in $\mathbb{Z}_{100}$.

(c) Risolvere l'equazione congruenziale $363 \cdot x \equiv 219 \pmod{100}$ in $\mathbb{Z}$.