

ESERCIZI SULLA
CARDINALITÀ

N.B.: il simbolo $\diamond_{\perp}$ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— * —

1 — Dati due insiemi X e Y tali che $|X| = |Y|$, dimostrare che $|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}(Y)|$.

Suggerimento: A partire da una biiezione $f : X \xrightarrow{\sim} Y$, si costruisca una opportuna biiezione $f_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(Y)$.

2 — Dati quattro insiemi A_1, A_2, B_1 e B_2 tali che $|A_1| = |A_2|$ e $|B_1| = |B_2|$, dimostrare che

$$|A_1 \amalg B_1| = |A_2 \amalg B_2|, \quad |A_1 \times B_1| = |A_2 \times B_2|, \quad |B_1^{A_1}| = |B_2^{A_2}|$$

Suggerimento: A partire da due biiezioni $h : A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ e $k : B_1 \xrightarrow{\sim} B_2$ assegnate, si devono costruire opportune biiezioni $(h \amalg k) : A_1 \amalg B_1 \xrightarrow{\sim} A_2 \amalg B_2$, $(h \times k) : A_1 \times B_1 \xrightarrow{\sim} A_2 \times B_2$ e $k^h : B_1^{A_1} \xrightarrow{\sim} B_2^{A_2}$.

3 — Dati due insiemi A e B , dimostrare che

$$|A \amalg B| = |B \amalg A|, \quad |A \times B| = |B \times A|$$

4 — Dati tre insiemi A, B e C , dimostrare che

$$\begin{aligned} |(A \times B)^C| &= |A^C \times B^C|, & |A^B \amalg C| &= |A^B \times A^C| \\ |(A^B)^C| &= |A^{B \times C}| = |A^{C \times B}| = |(A^C)^B| \end{aligned}$$

5 — Dato un insieme B e $n \in \mathbb{N}$, e posto $B^n := B \times B \times \cdots \times B$ (con n fattori, tutti uguali a B), dimostrare che

$$|B^{\{1,2,\dots,n\}}| = |B^n|$$

6 — Dato $k \in \mathbb{N}$, e posto $\mathbb{N}^k := \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ (con k fattori, tutti uguali a $\mathbb{N}$), dimostrare che

$$|\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$$

Suggerimento: Generalizzare il procedimento usato nella dimostrazione del Primo Teorema di Cantor — o “Teorema Fondamentale del Numerabile” — che è esattamente il caso $k = 2$ del risultato in esame. Oppure...

7 — Dato $k \in \mathbb{N}$ e k insiemi numerabili $S_1, S_2, \dots, S_k$, dimostrare che l'insieme prodotto cartesiano $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{k-1} \times S_k$ è a sua volta numerabile.

8 — Costruire una biiezione esplicita $X \longleftrightarrow Y$ per le seguenti coppie di insiemi:

$$(X, Y) = (\mathbb{N}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}), \quad (X, Y) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}), \quad (X, Y) = (\mathbb{N}, \mathbb{N} \amalg \mathbb{N} \amalg \dots \amalg \mathbb{N})$$

9 — Per ogni $k \in \mathbb{N}_+$, sia $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ che abbiano cardinalità k . Dimostrare che

$$|\mathcal{P}_k(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}| \quad \forall k \in \mathbb{N}_+$$

10 — Sia $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi *finiti* di $\mathbb{N}$. Dimostrare che

$$|\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}|$$

11 — Dato un insieme infinito E e un suo sottoinsieme F finito, dimostrare che

$$|E \setminus F| = |E|$$

Suggerimento: Si risolva prima il problema per $X = \mathbb{N}$, e poi si utilizzi la soluzione di tale caso per ottenerne una nel caso generale.

12 — Dato un insieme infinito X e un insieme finito K , dimostrare che

$$|X \amalg K| = |X|$$

Suggerimento: Si risolva prima il problema per $X = \mathbb{N}$, e poi si utilizzi la soluzione di tale caso per ricavarne una anche nel caso generale.

13 — Dati due insiemi $N \subseteq Y$ con N (infinito) numerabile e $|N| \not\preceq |Y|$, dimostrare che

$$|Y \setminus N| = |Y|$$

14 — Dati due insiemi infiniti N e Z con N numerabile e $|N| \not\preceq |Z|$, dimostrare che

$$|Z \amalg N| = |Z|$$

15 — Dati due insiemi A e B , dimostrare che

$$|A \setminus B| = |B \setminus A| \implies |A| = |B|$$

16 $\diamondsuit$ — Ricordando che $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, dimostrare che $|\mathbb{R}^k| = |\mathbb{R}|$ per ogni $k \in \mathbb{N}_+$.

Suggerimento: Trattare prima il caso $k = 2$, e poi generalizzare.

17 — Dati due insiemi A e B , dimostrare che

$$|B| \preceq |A| \iff \exists \text{ una funzione suriettiva } f : A \longrightarrow B$$
