ESERCIZI SU

ANELLI, IDEALI E MORFISMI

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

1 — Sia A un anello, R un sottoanello di A, e I un ideale (risp. sinistro, destro, bilatero) di A. Dimostrare che $I \cap R$ è un ideale (risp. sinistro, destro, bilatero) di R.

2 — *Nel seguito, si leggano i simboli* $\leq$, $\trianglelefteq_s$, $\trianglelefteq_d$, $\trianglelefteq$ *rispettivamente come "è sottoanello di", "è ideale sinistro di", "è ideale destro di", "è ideale (bilatero) di".*

Sia A un anello. Dati I, $J \subseteq A$, sia $I + J := \big\{\, i + j \;\big|\; i \in I\,,\, j \in J \,\big\}$, dimostrare che:

(a) $I \trianglelefteq_s A\,,\ J \trianglelefteq_s A \quad \Longrightarrow \quad \big(I + J\big) \trianglelefteq_s A$;

(b) $I \trianglelefteq_d A\,,\ J \trianglelefteq_d A \quad \Longrightarrow \quad \big(I + J\big) \trianglelefteq_d A$;

(c) $I \trianglelefteq A\,,\ J \trianglelefteq A \quad \Longrightarrow \quad \big(I + J\big) \trianglelefteq A$;

(d) $I \leq A\,,\ J \trianglelefteq A \quad \Longrightarrow \quad \big(I + J\big) \leq A$;

(e) $I \trianglelefteq A\,,\ J \leq A \quad \Longrightarrow \quad \big(I + J\big) \leq A$;

(f) In generale, $\quad I \leq A\,,\ J \leq A \ \not\Longrightarrow\ \big(I+J\big) \leq A \quad$ *(trovare un controesempio).*

3 — Sia A un anello. Per ogni famiglia $\big\{I_\sigma\big\}_{\sigma\in\Sigma}$ di sottoinsiemi di A, si definisca

$$\sum_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma := \left\{ a \in A \;\middle|\; \exists\, k \in \mathbb{N}\,,\, \sigma_1\,,\, \dots\,,\, \sigma_k \in \Sigma\,,\, i_{\sigma_1} \in I_{\sigma_1}\,,\, \dots\,,\, i_{\sigma_k} \in I_{\sigma_k} \;:\; a = \sum_{s=1}^{k} i_{\sigma_s} \right\}$$

Dimostrare che:

(a) $I_\sigma \trianglelefteq_s A \quad \forall\, \sigma \in \Sigma \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma \trianglelefteq_s A \;, \quad \sum_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma \trianglelefteq_s A$;

(b) $I_\sigma \trianglelefteq_d A \quad \forall\, \sigma \in \Sigma \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma \trianglelefteq_d A \;, \quad \sum_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma \trianglelefteq_d A$;

(c) $I_\sigma \trianglelefteq A \quad \forall\, \sigma \in \Sigma \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma \trianglelefteq A \;, \quad \sum_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma \trianglelefteq A$.

4 — *(a)* Dimostrare che la "relazione" di "essere sottoanello di" (tra anelli) è "transitiva", cioè, dati tre anelli A, B, C, si ha $\quad A \leq B\,, \quad B \leq C \quad \Longrightarrow \quad A \leq C$.

(b) Dimostrare che la "relazione" di "essere *ideale* (sinistro, destro o bilatero) di" (in un anello) *non* è "transitiva", cioè, dati tre anelli A, B, C, in generale si ha

$$A \trianglelefteq B\,,\ B \trianglelefteq C \ \not\Longrightarrow\ A \trianglelefteq C$$

<u>Suggerimento:</u> *La parte (a) è una verifica elementare. Per la parte (b), si tratta di trovare un esempio di tre anelli* A, B *e* C *tali che* $A \trianglelefteq B$ *e* $B \trianglelefteq C$ *ma* $A \ntrianglelefteq C$.

5 — Sia A un anello. Per ogni $a \in A$, dimostrare che:

(a) $(a)_s := A\,a \equiv \big\{ \alpha\, a \,\big|\, \alpha \in A \big\} \trianglelefteq_s A$

(b) $(a)_d := a\,A \equiv \big\{ a\, \alpha \,\big|\, \alpha \in A \big\} \trianglelefteq_d A$

(c) $Ann_s(a) := \big\{ \alpha \in A \,\big|\, \alpha\, a = 0 \big\} \trianglelefteq_s A$

(d) $Ann_d(a) := \big\{ \alpha \in A \,\big|\, a\, \alpha = 0 \big\} \trianglelefteq_d A$

— *N.B.: se A è commutativo, si scrive* $(a) := (a)_s \equiv (a)_d$ —

6 — Con la notazione del precedente esercizio 5, si calcolino

$$Ann_s\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \ , \quad Ann_s\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \ , \quad Ann_d\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \ , \quad Ann_d\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \ .$$

nell'anello $Mat_{n\times n}(\mathbb{Q})$. Si verifichi inoltre che tali sottoinsiemi *non* sono ideali *bilateri* dell'anello $Mat_{n\times n}(\mathbb{Q})$.

7 — Sia A un anello. Dimostrare che:

(a) se $L \trianglelefteq_s A$, allora $Ann_s(L) := \big\{ \alpha \in A \,\big|\, \alpha\, \ell = 0 \,,\ \forall\, \ell \in L \big\} \trianglelefteq A$

(b) se $L \trianglelefteq_d A$, allora $Ann_d(L) := \big\{ \alpha \in A \,\big|\, \ell\, \alpha = 0 \,,\ \forall\, \ell \in L \big\} \trianglelefteq A$

8 — Sia A un anello commutativo. Dati due ideali $I \trianglelefteq A$, $J \trianglelefteq A$, sia

$$\big(I : J\big) := \big\{ a \in A \,\big|\, a\, j \in I \,,\ \forall\, j \in J \big\} \quad .$$

Dimostrare che:

(a) $\big(I : J\big) \trianglelefteq A$

(b) $I \subseteq \big(I : J\big)$

(c) $\big(I : J\big)\, J \subseteq I \bigcap J$

(d) $\big(I : I + J\big) = \big(I : J\big)$

9 — Dato un anello A, sia $\mathcal{Z}(A) := \big\{ \alpha \in A \,\big|\, \alpha\, a = a\, \alpha \ \ \forall\, a \in A \big\}$, detto *centro di* A. Dimostrare che $\mathcal{Z}(A) \leq A$, *ma* (in generale) $\mathcal{Z}(A) \ntrianglelefteq A$; in parole, il centro è un sottoanello di A, ma in generale non è un ideale di A.

10 — Siano $A \xrightarrow{\ \pi\ } R$ e $R \xrightarrow{\ \sigma\ } A$ due morfismi di anelli tali che $\pi \circ \sigma = id_R$.
Dimostrare che:

(a) π è suriettivo, σ è iniettivo;

(b) $Ker(\pi) \bigcap Im(\sigma) = \{0_A\}$, $\quad Ker(\pi) + Im(\sigma) = A$.

11 — *Immergibilità di ogni anello in un anello unitario* — Sia A un anello. Nell'insieme $A_1 := \mathbb{Z} \times A$, si definiscano le operazioni $\oplus$ e $\otimes$ definite da

$$(z,a) \oplus (\zeta,\alpha) := (z+\zeta\,, a+\alpha) \quad , \qquad (z,a) \otimes (\zeta,\alpha) := (z\,\zeta\,,\, z\,\alpha + \zeta\,a + a\,\alpha)$$

per ogni (z,a), $(\zeta,\alpha) \in A_1$, dove la notazione $z\,\alpha$ e $\zeta\,a$ indica potenze additive nel gruppo $\big(A\,;+\big)$. Dimostrare che:

(a) $\big(A_1\,;\oplus\,,\otimes\big)$ è un anello unitario (precisando quale sia la sua unità);

(b) esiste un morfismo iniettivo di anelli da A ad A_1;

(c) se A è unitario, il morfismo di cui al punto *(b)* qui sopra *non* invia l'unità di A nell'unità di A_1.

12 — Sia $\big\{A_i\big\}_{i\in I}$ una famiglia di anelli, indicizzata da un insieme I. Il corrispondente prodotto cartesiano $\bigtimes_{i\in I} A_i$ è allora un anello — detto "prodotto diretto degli A_i" — per le due operazioni $\big(a'_i\big)_{i\in I} + \big(a''_i\big)_{i\in I} := \big(a'_i + a''_i\big)_{i\in I}$ e $\big(a'_i\big)_{i\in I}\big(a''_i\big)_{i\in I} := \big(a'_i a''_i\big)_{i\in I}$. Per ogni $i \in I$ sia dato un sottoinsieme $R_i \subseteq A_i$; si definisca allora

$$\bigtimes_{i\in I} A_i^{\langle R\rangle} \;:=\; \Big\{\big(a_i\big)_{i\in I} \in \bigtimes_{i\in I} A_i \;\Big|\; a_i \in R_i\,,\ \forall\, i \in I\Big\}\,.$$

Dimostrare che:

(a) se ogni R_i è sottoanello di A_i $(\,i \in I\,)$, allora $\bigtimes_{i\in I} A_i^{\langle R\rangle}$ è sottoanello di $\bigtimes_{i\in I} A_i$, ed è isomorfo al prodotto diretto $\bigtimes_{i\in I} R_i$ degli anelli R_i $(\,i\in I\,)$ — tra di loro;

(b) se ogni R_i è ideale sinistro di A_i $(\,i \in I\,)$, allora $\bigtimes_{i\in I} A_i^{\langle R\rangle}$ è ideale sinistro di $\bigtimes_{i\in I} A_i$;

(c) se ogni R_i è ideale destro di A_i $(\,i \in I\,)$, allora $\bigtimes_{i\in I} A_i^{\langle R\rangle}$ è ideale destro di $\bigtimes_{i\in I} A_i$;

(d) se ogni R_i è ideale (bilatero) di A_i $(\,i \in I\,)$, allora anche $\bigtimes_{i\in I} A_i^{\langle R\rangle}$ a sua volta è ideale (bilatero) di $\bigtimes_{i\in I} A_i$, e il corrispondente anello quoziente $\bigtimes_{i\in I} A_i \Big/ \bigtimes_{i\in I} A_i^{\langle R\rangle}$ è isomorfo al prodotto diretto $\bigtimes_{i\in I} A_i\big/R_i$ dei vari anelli quoziente A_i/R_i $(\,i\in I\,)$;

(e) per ogni $j \in I$, la funzione $\pi_j : \bigtimes_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j\ \big((a_i)_{i\in I} \mapsto a_j\big)$, è un epimorfismo;

(f) per ogni $j \in I$, la funzione $\eta_j : A_j \longrightarrow \bigtimes_{i\in I} A_i\ \big(a \mapsto (\delta_{ij}\,a)_{i\in I}\big)$, è un monomorfismo, la cui immagine è un ideale (bilatero) di $\bigtimes_{i\in I} A_i$.

<u>Suggerimento</u>: *Per evitare confusioni fuorvianti, si cominci considerando il caso in cui l'insieme I sia di soli due o tre indici, dunque studiamo il prodotto diretto di due o tre anelli... Tutto quel che c'è da capire, si manifesta già in questo caso semplice.*

13 — _Teorema Cinese del Resto (per Anelli)_ — Sia A un anello e sia $\{J_i\}_{i \in I}$ una famiglia di ideali di A. Dimostrare che:

(a) esiste un monomorfismo "canonico" di anelli

$$j \,:\, A\Big/\bigcap_{i\in I} J_i \lhook\joinrel\longrightarrow \bigtimes_{i\in I} A\Big/J_i \quad , \qquad a + \big(\bigcap_{i\in I} J_i\big) \mapsto \big(a + J_i\big)_{i\in I}$$

(b) se A è commutativo e unitario, e se per ogni $h, k \in I$ si ha $J_h + J_k = A$, allora, il monomorfismo ϕ_I in *(a)* è un isomorfismo.

Suggerimento: *La parte (a) segue facilmente dal Teorema Fondamentale di Omomorfismo, applicato alla funzione* $\varphi_I : A \longrightarrow \bigtimes_{i\in I} A\big/J_i$ *definita da* $\phi_I(a) := \big(a + J_i\big)_{i\in I}$. *Bisogna soltanto dimostrare che tale* ϕ_I *è un morfismo di anelli e che* $Ker(\phi_I) = \bigcap_{i\in I} J_i$.

14 — Dimostrare che il campo $\mathbb{R}$ non è isomorfo al campo $\mathbb{C}$.

Suggerimento: *Basta dimostrare che in uno dei due campi vale una qualche proprietà (relativamente alla struttura di anello) che certamente non vale invece nell'altro campo...*

15 — Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo, e sia

$$\mathbb{Z}_{(p)} \;:=\; \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}\,,\, b \neq 0\,,\, \text{M.C.D.}(a,b) = 1\,,\; b \notin p\,\mathbb{Z} \right\} \quad .$$

Dimostrare che:

(a) $\mathbb{Z}_{(p)}$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$;

(b) $I_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_{(p)} \;\middle|\; a \in p\,\mathbb{Z} \right\}$ è un ideale di $\mathbb{Z}_{(p)}$;

(c) $U\big(\mathbb{Z}_{(p)}\big) \,=\, \mathbb{Z}_{(p)} \setminus I_{(p)}$;

(d) se $J \trianglelefteq \mathbb{Z}_{(p)}$ e $J \neq \mathbb{Z}_{(p)}$, allora $J \subseteq I_{(p)}$.

Suggerimento: *Le parti (a)-(b)-(c) seguono da verifica diretta, mentre (d) segue da (c).*

16 — Sia A un anello commutativo. Definiamo *radicale nilpotente* di A il sottoinsieme

$$\mathfrak{N}(A) \;:=\; \left\{ a \in A \;\middle|\; \exists\, n \in \mathbb{N} : a^n = 0 \right\} \;:=\; \left\{ \text{elementi } \textit{nilpotenti} \text{ di } A \right\}$$

Dimostrare che $\mathfrak{N}(A)$ è un ideale di A, e inoltre che $\mathfrak{N}\big(\mathfrak{N}(A)\big) = \mathfrak{N}(A)$.

17 — Con la notazione dell'esercizio 16 qui sopra, si calcolino i radicali nilpotenti $\mathfrak{N}\big(\mathbb{Z}_{12}\big)$, $\mathfrak{N}\big(\mathbb{Z}\big)$, $\mathfrak{N}\big(\mathbb{Z}_{30}\big)$, $\mathfrak{N}\big(\mathbb{Z}_{17}\big)$, $\mathfrak{N}\big(\mathbb{Q}\big)$ e $\mathfrak{N}\big(\mathbb{Z}_{84}\big)$.

18 — Sia A un anello commutativo unitario, e sia $\mathfrak{N}(A)$ il suo radicale nilpotente (definito come nell'esercizio 14 qui sopra). Dimostrare che $U(A) + \mathfrak{N}(A) \subseteq U(A)$.

<u>Suggerimento</u>: *Osserviamo che* $U(A)+\mathfrak{N}(A) := \big\{\, u+a \,\big|\, u \in U(A)\,, a \in \mathfrak{N}(A) \,\big\}$ *e che* $(u+a) \in U(A) \iff \big(1+u^{-1}a\big) \in U(A)$ *— dove* $u^{-1}a \in \mathfrak{N}(A)$ *— quindi basta dimostrare che* $1+\mathfrak{N}(A) \subseteq U(A)$ *. Inoltre, poiché* $\mathfrak{N}(A) = -\mathfrak{N}(A)$ *, basta dimostrare che per ogni* $a \in \mathfrak{N}(A)$ *, l'elemento* $(1-a)$ *è invertibile in* A *. Ora, per ogni* $n \in \mathbb{N}_+$ *si ha* $(1-a)\big(1+a+a^2+\cdots+a^{n-2}+a^{n-1}\big) = 1-a^{n+1}$ *, e siccome per* $n \gg 0$ *si ha* $a^n = 0$ *perchè* $a \in \mathfrak{N}(A)$ *, possiamo concludere.*

19 — Sia A un anello commutativo unitario. Per ogni ideale I in A, si definisca

$$\mathfrak{r}(I) := \big\{\, a \in A \,\big|\, \exists\, n \in \mathbb{N} : a^n \in I \,\big\} =: \textit{radicale di } I\,.$$

Dimostrare che:

(a) $\mathfrak{r}\big(\{0_A\}\big) = \mathfrak{N}(A) =:$ *radicale nilpotente di* A;

(b) $I \subseteq \mathfrak{r}(I)\,, \quad \mathfrak{r}(I) \trianglelefteq A$;

(c) $\mathfrak{r}\big(\mathfrak{r}(I)\big) = \mathfrak{r}(I)$;

(d) $\mathfrak{r}(I) = p_I^{-1}\big(\mathfrak{N}\big(A/I\big)\big)$, dove $p_I : A \twoheadrightarrow A/I$ è la proiezione canonica.

<u>Suggerimento</u>: *Si può ottenere tutto con verifiche dirette, oppure dalla parte (d) — che comunque segue dalle definizioni — insieme ai risultati sul radicale nilpotente di un anello trattati nell'esercizio 16 qui sopra.*

20 — Sia A un anello commutativo unitario, $\mathfrak{N}(A)$ il radicale nilpotente di A, e $A[x]$ l'anello dei polinomi in x a coefficienti in A. Dimostrare che:

(a) $\mathfrak{N}\big(A[x]\big) = \big(\mathfrak{N}(A)\big)[x]$;

(b) ☡ il gruppo $U\big(A[x]\big)$ degli elementi invertibili in $A[x]$ è descritto da

$$U\big(A[x]\big) = \Big\{ \textstyle\sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n \in A[x] \,\Big|\, a_0 \in U(A)\,,\ a_n \in \mathfrak{N}(A) \ \ \forall\, n>0 \Big\}$$

<u>Suggerimento</u>: *Per la parte (a), l'inclusione "$\supseteq$" è immediata: segue dal fatto ovvio che* $\mathfrak{N}\big(A[x]\big) \supseteq \mathfrak{N}(A)$ *— perché* $\mathfrak{N}(A)$ *è sottoanello di* A *— e dal fatto che* $\mathfrak{N}\big(A[x]\big)$ *è un ideale in* $A[x]$ *. L'inclusione inversa "$\subseteq$" si ottiene con un procedimento induttivo: se un polinomio* $p(x)$ *è nilpotente, allora il suo termine di grado massimo* a_N *è nilpotente; ma allora* $p(x) - a_N\, x^N$ *è a sua volta nilpotente, ma di grado strettamente più basso, per cui un'ipotesi induttiva forte (sul grado) ci permette di concludere.*

Per la parte (b), se $p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n \in A[x]$ *con* $a_0 \in U(A)$ *e* $a_n \in \mathfrak{N}(A)$ $(\forall\, n>0)$*, allora per* $p(x) := a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\, x^n$ *si ha che* $a_0 \in U(A) \subseteq U\big(A[x]\big)$ *mentre* $\sum_{n=1}^{N} a_n\, x^n$ *è nilpotente — per la parte (a) — e quindi dall'esercizio 18 qui sopra segue che* $p(x) \in U\big(A[x]\big)$ *. Pertanto* $U\big(A[x]\big)$ *contiene effettivamente l'insieme di destra in (b).*

Viceversa, per l'inclusione inversa osserviamo che se $p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n \in A[x]$ *è invertibile in* $A[x]$ *, allora è invertibile il suo termine noto, cioè* $a_0 \in U(A)$ *, perché in un* *prodotto di polinomi il termine noto del prodotto è il prodotto dei termini noti: applicando questa osservazione al prodotto* $p(x)\,p(x)^{-1} = 1$ *, e scrivendo* $p(x)^{-1} = \sum_{n=0}^{M} b_n\, x^n$ *, si trova* $a_0\, b_0 = 1$ *e quindi* $a_0 \in U(A)$ *con* $a_0^{-1} = b_0$ *. Più in generale, guardando i coefficienti di* x *nell'identità* $p(x)\,p(x)^{-1} = 1$ *troviamo le identità* $\sum_{h+k=n} a_h\, b_k = 0$ *per ogni* $n > 0$ *: in particolare, si ha* $a_N\, b_M = 0$ *. Da questo e dalle identità* $\sum_{h+k=n} a_h\, b_k = 0$ *(per* $n > 0$ *) ricaviamo per induzione su* s *che* $a_N^{s+1} b_{M-s} = 0$ *per ogni* $s = 1, 2, \dots, m$ *. In particolare — per* $s = M$ *— questo ci dà* $a_N^{M+1} b_0 = 0$ *, e siccome* $b_0 \in U(A)$ *si conclude che* $a_N^{M+1} = 0$ *, dunque* $a_N \in \mathfrak{N}(A)$ *. A questo punto passiamo al polinomio* $p_-(x) := p(x) - a_N x^N$ *, che è ancora nilpotente ma ha grado strettamente minore di* $p(x)$ *. Procedendo per induzione (forte) sul grado, questo ci permette di concludere che tutti i coefficienti di* $p(x)$ *dopo il termine noto sono nilpotenti, q.e.d.*

21 — Dato un anello unitario A, siano

$$\lambda \colon A \hookrightarrow End\big(A\,;+\big) \;, \quad a \mapsto \lambda_a \begin{pmatrix} A \longrightarrow A \\ x \mapsto \lambda_a(x) := a\,x \end{pmatrix}$$

$$\rho \colon A \hookrightarrow End\big(A\,;+\big) \;, \quad a \mapsto \rho_a \begin{pmatrix} A \longrightarrow A \\ x \mapsto \rho_a(x) := x\,a \end{pmatrix}$$

i monomorfismi di anelli dati dal Teorema di Cayley (per anelli), e si ponga

$$\lambda(A) := Im\,(\lambda) \quad , \quad \rho(A) := Im\,(\rho) \quad .$$

Si considerino poi

$$C\big(\lambda(A)\big) := \big\{\, \sigma \in End\big(A\,;+\big) \;\big|\; \sigma \circ \lambda_a = \lambda_a \circ \sigma \,,\;\; \forall\, a \in A \,\big\}$$
$$C\big(\rho(A)\big) := \big\{\, \tau \in End\big(A\,;+\big) \;\big|\; \tau \circ \rho_a = \rho_a \circ \tau \,,\;\; \forall\, a \in A \,\big\} \,.$$

Dimostrare che $\quad C\big(\lambda(A)\big) = \rho(A) \quad , \quad C\big(\rho(A)\big) = \lambda(A) \quad .$

22 — Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\vartheta_n : (\mathbb{Z}_n\,;+\,,\,\cdot\,) \hookrightarrow \big(End(\mathbb{Z}_n\,;+\,)\,;\oplus\,,\circ\big)$ il monomorfismo di anelli dato dal *Teorema di Cayley* (per anelli) applicato all'anello $\mathbb{Z}_n$. Si verifichi che ϑ_n è in effetti un <u>iso</u>morfismo (*N.B.:* per $n = 0$ si ha $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}$).

Analogamente, detto $\vartheta : (\mathbb{Q}\,;+\,,\,\cdot\,) \hookrightarrow \big(End(\mathbb{Q}\,;+\,)\,;\oplus\,,\circ\big)$ il monomorfismo di anelli dato dal *Teorema di Cayley* (per anelli) applicato all'anello $\mathbb{Q}$, si verifichi che in effetti ϑ è un <u>iso</u>morfismo.

23 — Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\mathbb{Z}_n$ l'anello delle classi resto modulo n, e sia $End_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_n)$ l'insieme degli endomorfismi di anello di $\mathbb{Z}_n$, che è un monoide per l'operazione di composizione. Analogamente, sia $End_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q})$ l'insieme degli endomorfismi di anello del campo $\mathbb{Q}$ dei razionali, anch'esso un monoide per l'operazione di composizione.

Sia $Aut_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_n)$ il *gruppo* degli automorfismi di anello di $\mathbb{Z}_n$, e analogamente $Aut_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q})$ il *gruppo* degli automorfismi di anello di $\mathbb{Q}$. Dimostrare che:

(a) $End_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_n)$ è isomorfo al gruppoide $\big(\{\, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n \,\big|\, \bar{c}^{\,2} = \bar{c} \,\}\,;\, \cdot\,\big)$ — che è sottogruppoide di $\big(\mathbb{Z}_n\,;\,\cdot\big)$; in particolare, se n è primo allora $End_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_n) = \big\{\, 0_{\mathbb{Z}_n}\,,\, id_{\mathbb{Z}_n} \big\}$;

(b) $End_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q}) = \big\{\, 0_{\mathbb{Q}}\,,\, id_{\mathbb{Q}} \big\}$.

(c) $Aut_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_n) = \big\{\, id_{\mathbb{Z}_n} \big\}$ e $Aut_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q}) = \big\{\, id_{\mathbb{Q}} \big\}$, cioè tali gruppi sono banali.

Suggerimento: Il punto chiave, in ciascun caso, è che un (endo/auto)-morfismo ϕ del tipo in esame è univocamente determinato dalla scelta di $\phi(1)$: nel caso di $\mathbb{Z}_n$ ciò segue dal fatto che il gruppo $\big(\mathbb{Z}\,;+\big)$ è ciclico, generato da 1; nel caso di $\mathbb{Q}$ la situazione è simile però bisogna lavorarci un pochino. Alla scelta di $\phi(1)$ poi bisogna imporre anche la condizione che ϕ trasformi il prodotto in prodotto.

24 — Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni a valori reali, con la sua struttura standard di anello (commutativo unitario). Si definiscano i sottoinsiemi

$$\begin{aligned}
Div\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big) &:= \Big\{\, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\Big|\; \exists \lim_{n\to\infty} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \{+\infty, -\infty\} \Big\} && \textit{(successioni divergenti)}\\
Boun\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big) &:= \Big\{\, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\Big|\; \exists\, M \in \mathbb{R} : |a_n| \leq M \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \Big\} && \textit{(successioni limitate)}\\
Conv\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big) &:= \Big\{\, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\Big|\; \exists \lim_{n\to\infty} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} \Big\} && \textit{(successioni convergenti)}\\
Conv_0\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big) &:= \Big\{\, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\Big|\; \exists \lim_{n\to\infty} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Big\} && \textit{(successioni infinitesime)}
\end{aligned}$$

Dimostrare che:

(a) $Div\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$ non è sottoanello di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(b) $Boun\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$ è sottoanello di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ma non ne è ideale.

(c) $Conv\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$ è sottoanello di $Boun\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$, ma non ne è ideale.

(d) $Conv_0\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$ è sottoanello di $Conv\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$, di $Boun\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$ e di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(e) $Conv_0\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$ è ideale di $Conv\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$ e di $Boun\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$, ma non di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

25 — Sia (a,b) un intervallo non vuoto, aperto, della retta reale $\mathbb{R}$, eventualmente coincidente con $\mathbb{R}$ stesso. Sia $C^0\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ l'insieme di tutte le funzioni continue da (a,b) ad $\mathbb{R}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}_+$ sia $C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ l'insieme di tutte le funzioni da (a,b) ad $\mathbb{R}$ che siano differenziabili — cioè derivabili e con derivata continua — fino all'ordine k (incluso). Infine, sia $C^\infty\big((a,b);\mathbb{R}\big) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ l'insieme di tutte le funzioni da (a,b) ad $\mathbb{R}$ che siano differenziabili fino a qualsiasi ordine.

Nell'insieme $\mathbb{R}^{(a,b)}$ di tutte le applicazioni da (a,b) ad $\mathbb{R}$, si consideri la struttura standard di anello (con le operazioni definite punto per punto). Dimostrare che:

(a) $C^0\big((a,b);\mathbb{R}\big)$, $C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ — $\forall\, k \in \mathbb{N}_+$ — e $C^\infty\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ sono tutti sottoanelli dell'anello $\mathbb{R}^{(a,b)}$, ma non ne sono ideali;

(b) per ogni $k \in \mathbb{N}_+$, il sottoinsieme $C^\infty\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ di $C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ è un suo sottoanello ma *non* un suo ideale;

(c) per ogni $k \in \mathbb{N}_+$, il sottoinsieme $C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ di $C^{k-1}\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ è un suo sottoanello ma *non* un suo ideale.

Suggerimento: *Gli enunciati relativi all'essere "sottoanello di" si dimostrano con verifica diretta, che segue dalle formule di Leibniz per la derivata di un prodotto. Gli enunciati relativi all'essere "ideale di" invece sono un po' più delicati, ma si possono ottenere tutti con la stessa strategia. Precisamente, le funzioni costanti sono contenute in ciascuno degli ideali in esame (perché stanno in $C^\infty\big((a,b);\mathbb{R}\big)$, che è il più piccolo di tutti questi sottanelli. Allora, ad esempio, considerando la funzione costante 1 come contenuta in $C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ e prendendo una funzione $f \in C^{k-1}\big((a,b);\mathbb{R}\big) \setminus C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$, abbiamo che $f \cdot 1 = f \notin C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$, sebbene sia $1 \in C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$, il che implica che $C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big) \ntrianglelefteq C^{k-1}\big((a,b);\mathbb{R}\big)$. Il punto critico dunque è sapere che* esistono *davvero funzioni $f \in C^{k-1}\big((a,b);\mathbb{R}\big) \setminus C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$, che è un altro problema (per il quale basta in realtà il caso $k=1$, cioè sapere che esistono funzioni continue ma non derivabili!).*

In modo analogo si trattano gli altri casi.

26 — Siano A un anello, S un insieme, e A^S l'insieme di tutte le applicazioni da S ad A, con la struttura standard di anello di funzioni (a valori in un anello). Per ogni $f \in A^S$, si definisca $Supp(f) := \big\{\, s \in S \,\big|\, f(s) \neq 0 \,\big\}$. Dimostrare che:

(a) Il sottoinsieme $A^S_{fin} := \Big\{\, f \in A^S \,\Big|\, Supp(f) \text{ è finito} \,\Big\}$ è un ideale bilatero di A^S.

(b) Per ogni $\Sigma \subseteq S$, il sottoinsieme $A^S_{(\Sigma)} := \Big\{\, f \in A^S \,\Big|\, f(\sigma) = 0\,,\ \forall\, \sigma \in \Sigma \,\Big\}$ è un ideale bilatero di A^S.

27 — Dato un morfismo di anelli $\phi : R \longrightarrow A$, e indicato con $M_n(B) := Mat_{n\times n}(B)$ l'anello delle matrici (quadrate) $n\times n$ a coefficienti in un qualsiasi anello B, dimostrare che la funzione associata

$$M_n(\phi) \,:\, M_n(R) \longrightarrow M_n(A)\,, \qquad \big(r_{i,j}\big) \mapsto M_n(\varphi)\Big(\big(r_{i,j}\big)\Big) := \big(\phi(r_{i,j})\big)$$

è a sua volta un morfismo di anelli. Inoltre:

(a) per $\phi = id_A$ si ha $M_n(id_A) = id_{M_n(A)}$;

(b) se $\psi : A \longrightarrow T$ è un altro morfismo di anelli si ha $M_n(\psi \circ \phi) = M_n(\psi) \circ M_n(\phi)$.

28 — Sia A un anello e sia R un sottoinsieme di A. Dato $n \in \mathbb{N}_+$, l'insieme $M_n(R) := Mat_n(R)$ delle matrici $n\times n$ a coefficienti in R si identifica naturalmente ad un sottoinsieme dell'analogo insieme $M_n(A)$. Dimostrare che:

(a) se R è sottoanello di A, allora $M_n(R)$ è sottoanello di $M_n(A)$;

(b) se R è ideale sinistro di A, allora $M_n(R)$ è ideale sinistro di $M_n(A)$;

(c) se R è ideale destro di A, allora $M_n(R)$ è ideale destro di $M_n(A)$;

(d) se R è ideale (bilatero) di A, allora $M_n(R)$ è ideale (bilatero) di $M_n(A)$, e l'anello quoziente $M_n(A)\Big/M_n(R)$ è isomorfo all'anello di matrici $M_n\big(A/R\big)$.

Suggerimento: *Si tratta di verifiche dirette, in ciascun caso. Per le parti (c) e (d) si può anche procedere, alternativamente, come segue: detta* $\pi_R : A \twoheadrightarrow A/R$ *la proiezione canonica da A al suo quoziente* A/R*, abbiamo il morfismo di anelli* $M_n(\pi_R) : M_n(A) \twoheadrightarrow M_n\big(A/R\big)$ *dato dall'esercizio 27 qui sopra. Tale* $M_n(\pi_R)$ *ha nucleo* $Ker\big(M_n(\pi_R)\big) = M_n(R)$ *, e da questo segue subito l'enunciato in (c); inoltre,* $M_n(\pi_R)$ *è a sua volta suriettivo, e quindi l'enunciato in (d) segue immediatamente dal Teorema Fondamentale di Omomorfismo per anelli.*

29 — Dato un campo $\Bbbk$ e uno spazio vettoriale V su $\Bbbk$, consideriamo l'insieme $End_{\mathcal{V}}(V)$ "endomorfismi di V come spazio vettoriale" e l'insieme $Aut_{\mathcal{V}}(V)$ "automorfismi di V come spazio vettoriale", cioè rispettivamente

$$End_{\mathcal{V}}(V) := \big\{\, \phi \in V^V \,\big|\, \phi(c_1\, v_1 + c_2\, v_2) = c_1\, \phi(v_1) + c_2\, \phi(v_2)\,,\ \forall\, c_1, c_2 \in \Bbbk\,,\ v_1, v_2 \in V \,\big\}$$
$$Aut_{\mathcal{V}}(V) := \big\{\, \phi \in \mathcal{S}(V) \,\big|\, \phi(c_1\, v_1 + c_2\, v_2) = c_1\, \phi(v_1) + c_2\, \phi(v_2)\,,\ \forall\, c_1, c_2 \in \Bbbk\,,\ v_1, v_2 \in V \,\big\}$$

Dimostrare che:

(a) $End_{\mathcal{V}}(V)$ è sottoanello unitario — cioè contenente anche l'unità id_V — dell'anello unitario $End_{\mathcal{G}}(V;+)$ degli endomorfismi del gruppo abeliano $(V;+)$;

(b) $Aut_{\mathcal{V}}(V)$ è sottogruppo del gruppo $\mathcal{S}(V)$ delle permutazioni di V in sé stesso;

(c) se V ha dimensione finita, indicata con n, esistono isomorfismi

$End_{\mathcal{V}}(V) \cong Mat_{n\times n}(\Bbbk)$ (come anelli), $\quad Aut_{\mathcal{V}}(V) \cong GL_n(\Bbbk)$ (come gruppi).

30 — Dato un anello A e il corrispondente (per $n \in \mathbb{N}_+$ fissato) anello di matrici quadrate $M_n(A)$, consideriamo — per ogni $k \in \{0, \dots, n\}$ — i sottoinsiemi di $M_n(A)$

$$\mathrm{u}^+_{n;k}(A) := \Big\{\, M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,\dots,n;}^{j=1,\dots,n;} \in M_n(A) \,\Big|\, m_{i,j} = 0 \ \ \forall\, j < i + k \,\Big\}$$
$$\mathrm{u}^-_{n;k}(A) := \Big\{\, M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,\dots,n;}^{j=1,\dots,n;} \in M_n(A) \,\Big|\, m_{i,j} = 0 \ \ \forall\, i > j + k \,\Big\}$$
$$\mathrm{d}_n(A) := \Big\{\, M = \big(m_{i,j}\big)_i^j \in M_n(A) \,\Big|\, m_{i,j} = 0 \ \ \forall\, i \neq j \,\Big\} = \Big\{\, \textit{matrici diagonali} \,\Big\}$$
$$\mathrm{u}^{+|d}_{n;k}(A) := \mathrm{d}_n(A) + \mathrm{u}^+_{n;k}(A) \quad , \qquad \mathrm{u}^{-|d}_{n;k}(A) := \mathrm{d}_n(A) + \mathrm{u}^-_{n;k}(A)$$

e poniamo $\mathrm{t}^\pm_n(A) := \mathrm{u}^\pm_{n;0}(A)$. Dimostrare che (per ogni k):

(a) $\qquad \mathrm{u}^\pm_{n;k'}(A) \subseteq \mathrm{u}^\pm_{n;k}(A) \subseteq \mathrm{t}^\pm_n(A) \quad$ per ogni $k' \geq k$;

(b) $\mathrm{u}^{\pm}_{n;k}(A)$ è ideale (bilatero) di $\mathrm{t}^{\pm}_{n}(A)$, ma *non* di $M_n(A)$;

(c) per ogni $k > 0$, l'anello quoziente $\mathrm{u}^{\pm}_{n;k}(A)\Big/\mathrm{u}^{\pm}_{n;k+1}(A)$ è isomorfo all'anello $\big(A^{n-k}\,;\oplus\,,\odot\big)$ in cui la somma $\oplus$ è la normale somma del prodotto diretto di $(n-k)$ copie del gruppo additivo $(A\,;+)$ e $\odot$ è il prodotto banale (cioè dà sempre zero);

(d) per $k=0$ esistono isomorfismi di anelli $\mathrm{t}^{\pm}_{n}(A)\Big/\mathrm{u}^{\pm}_{n;1}(A) \cong \mathrm{d}_n(A) \cong \big(A^n\,;+\,,\cdot\big)$ in cui l'ultimo anello ha la struttura di anello *prodotto diretto* (di A con sé stesso n volte).

(e) $\mathrm{u}^{\pm|d}_{n;k}(A)$ è sottoanello *unitario* di $\mathrm{t}^{\pm}_{n}(A)$, cioè è un sottoanello che contiene anche l'unità dell'anello $\mathrm{t}^{\pm}_{n}(A)$.

<u>Suggerimento</u>: *Si cominci analizzando i casi* $n=3$ *e* $n=4$, *e poi si generalizzi.*

31 — Dato un anello unitario A e un $n \in \mathbb{N}_+$, consideriamo i gruppi $GL_n(A) := U\big(Mat_n(A)\big)$, $T^{\pm}_n(A) := U\big(\mathrm{t}^{\pm}_n(A)\big)$, $U^{\pm}_{n;k}(A) := U\big(\mathrm{u}^{\pm|d}_{n;k}(A)\big)$, $D_n(A) := U\big(\mathrm{d}_n(A)\big)$ degli elementi invertibili rispettivamente negli anelli unitari $M_n(A)$, $\mathrm{t}^{\pm}_n(A)$, $\mathrm{u}^{\pm|d}_{n;k}(A)$ e $\mathrm{d}_n(A)$ — con notazione come nell'esercizio 30 qui sopra. Dimostrare che:

(a) $U^{\pm}_{n;k'}(A) \subseteq U^{\pm}_{n;k}(A) \subseteq T^{\pm}_n(A)$ per ogni $k' \geq k$;

(b) $U^{\pm}_{n;k}(A)$ è sottogruppo normale di $T^{\pm}_n(A)$, ma *non* di $GL_n(A)$.

(c) il gruppo quoziente $U^{\pm}_{n;k}(A)\Big/U^{\pm}_{n;k+1}(A)$ è isomorfo al gruppo $\big(A^{n-k}\,;\oplus\big)$, prodotto diretto di $(n-k)$ copie del gruppo additivo $(A\,;+)$;

(d) $T^{\pm}_n(A)$, $U^{\pm}_{n;k}(A)$ e $D_n(A)$ sono descritti esplicitamente da

$$\begin{aligned}
T^{\pm}_n(A) \; &:= \; \Big\{ M = \big(m_{i,j}\big)_i^j \in \mathrm{t}^{\pm}_n(A) \;\Big|\; m_{\ell,\ell} \in U(A)\,,\ \forall\, \ell = 1,\dots,n \Big\} \\
U^{\pm}_{n;k}(A) \; &:= \; \Big\{ M = \big(m_{i,j}\big)_i^j \in \mathrm{u}^{\pm|1}_{n;k}(A) \;\Big|\; m_{\ell,\ell} \in U(A)\,,\ \forall\, \ell = 1,\dots,n \Big\} \\
D_n(A) \; &:= \; \Big\{ M = \big(m_{i,j}\big)_i^j \in \mathrm{d}_n(A) \;\Big|\; m_{\ell,\ell} \in U(A)\,,\ \forall\, \ell = 1,\dots,n \Big\}
\end{aligned}$$

(e) esistono isomorfismi di gruppi $T^{\pm}_n(A)\Big/U^{\pm}_{n;1}(A) \cong D_n(A) \cong \big(U(A)^n\,;+\,,\cdot\big)$, dove l'ultimo gruppo non è altro che il *prodotto diretto* di $U(A)$ con sé stesso n volte.

<u>Suggerimento</u>: *Si utilizzino i risultati dell'esercizio 30 qui sopra. Si sfrutti inoltre il fatto che* $\mathrm{u}^{\pm|d}_{n;k}(A) := \mathrm{d}_n(A) + \mathrm{u}^{\pm}_{n;k}(A)$, *dove* $\mathrm{u}^{\pm}_{n;k}(A)$ *è fatto di matrici* nilpotenti *— cioè tali che una loro potenza sia zero — mentre* $\mathrm{d}_n(A)$ *è fatto di matrici (diagonali) che sono invertibili — in* $M_n(A)$ *— se e soltanto se i loro termini diagonali sono invertibili — in* A *; si può allora ripetere il ragionamento fatto per dimostrare l'esercizio 18 (che d'altra parte* non *si può applicare direttamente, perché l'anello* $M_n(A)$ non *è commutativo!).*

32 — Sia A un anello. Consideriamo l'insieme delle matrici "triangolari superiori infinite" a coefficienti in A, cioè l'insieme

$$\mathrm{t}_\infty^+(A) \;:=\; \Big\{ M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,2,\dots;}^{j=1,2,\dots;} \;\Big|\; m_{i,j} \in A \;\; \forall\, i,j \in \mathbb{N}_+ \,,\; m_{i,j} = 0 \;\; \forall\, i > j \Big\}$$

e l'analogo insieme delle matrici "triangolari inferiori infinite" a coefficienti in A, cioè

$$\mathrm{t}_\infty^-(A) \;:=\; \Big\{ M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,2,\dots;}^{j=1,2,\dots;} \;\Big|\; m_{i,j} \in A \;\; \forall\, i,j \in \mathbb{N}_+ \,,\; m_{i,j} = 0 \;\; \forall\, i < j \Big\}$$

Dimostrare che:

(a) entrambi $\mathrm{t}_\infty^+(A)$ e $\mathrm{t}_\infty^-(A)$ sono anelli rispetto alle operazioni di somma "componente per componente" e di prodotto "righe per colonne" date dalle formule usuali;

(b) per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ esistono monomorfismi canonici di anelli $\phi_n^\pm : \mathrm{t}_n^\pm(A) \hookrightarrow \mathrm{t}_\infty^\pm(A)$;

(c) se A è unitario, allora gli anelli $\mathrm{t}_\infty^\pm(A)$ sono unitari, e i monomorfismi $\phi_n^\pm$ di cui al punto *(b)* qui sopra mandano l'unità dell'anello $\mathrm{t}_n^\pm(A)$ nell'unità dell'anello $\mathrm{t}_\infty^\pm(A)$.

33 — Sia A un anello. Con le notazioni dell'esercizio 32 qui sopra, consideriamo il sottoinsieme $\mathrm{t}_\infty^{\pm\,;\mathit{fin}}(A)$ di $\mathrm{t}_\infty^\pm(A)$ definito così:

$$\begin{aligned} \mathrm{t}_\infty^{+\,;\mathit{fin}}(A) \;&:=\; \Big\{ M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,2,\dots;}^{j=1,2,\dots;} \in \mathrm{t}_\infty^+(A) \;\Big|\; m_{i,j} = 0 \;\;\; \forall\, j \gg 0 \Big\} \\ \mathrm{t}_\infty^{-\,;\mathit{fin}}(A) \;&:=\; \Big\{ M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,2,\dots;}^{j=1,2,\dots;} \in \mathrm{t}_\infty^-(A) \;\Big|\; m_{i,j} = 0 \;\;\; \forall\, i \gg 0 \Big\} \end{aligned}$$

Dimostrare che $\mathrm{t}_\infty^{\pm\,;\mathit{fin}}(A)$ è sottoanello di $\mathrm{t}_\infty^\pm(A)$.

34 — Sia A un anello, e siano $A[x]$ e $A[[x]]$ i corrispondenti anelli di polinomi e di serie formali nella variabile x a coefficienti in A. Con le notazioni degli esercizi 32 e 33 qui sopra, consideriamo la funzione $\mu^+ : A[[x]] \longrightarrow \mathrm{t}_\infty^+(A)$ definita da

$$\mu^+\bigg(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\bigg) \;:=\; \big(m_{i,j}\big)_{i=1,2,\dots;}^{j=1,2,\dots;} \qquad \text{con} \qquad m_{i,j} \;:=\; \begin{cases} 0 & \forall\;\, i > j \\ a_{j-i} & \forall\;\, i \leq j \end{cases}$$

cioè esplicitamente da

$$\mu^+\bigg(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\bigg) \;:=\; \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Dimostrare che:

(a) la funzione μ^+ è un monomorfismo di anelli;

(b) $\quad \mu^+\big(A[x]\big) \;=\; \mathrm{t}_\infty^{+\,;\mathit{fin}}(A) \bigcap \mu^+\big(A[[x]]\big)$;

(c) esiste un'analoga funzione $\mu^- : A[[x]] \longrightarrow \mathrm{t}_\infty^-(A)$ — *descriverla* esplicitamente! — che ha analoghe proprietà — *precisarle* esplicitamente!

35 — Sia A un anello unitario. Con le notazioni dell'Esercizio 32 qui sopra, consideriamo l'insieme delle matrici "triangolari superiori infinite *invertibili*" (a coefficienti in A) e l'insieme delle matrici "triangolari inferiori infinite *invertibili*" (a coefficienti in A), cioè i due gruppi $T_\infty^\pm(A) := U\big(\mathrm{t}_\infty^\pm(A)\big)$ degli elementi invertibili nei due anelli $\mathrm{t}_\infty^\pm(A)$.
Dimostrare che:

(a) per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ esistono monomorfismi canonici di gruppi $\varPhi_n^+ : T_n^\pm(A) \hookrightarrow T_\infty^\pm(A)$;

(b) i gruppi $T_\infty^\pm(A)$ sono descritti esplicitamente da

$$T_\infty^\pm(A) \;\; := \;\; \Big\{\, M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,2,\dots;}^{j=1,2,\dots;} \in \mathrm{t}_\infty^\pm(A) \;\Big|\; m_{\ell,\ell} \in U(A) \;\; \forall\, \ell \in \mathbb{N}_+ \,\Big\}$$

36 — Sia A un anello unitario. Sfruttando gli esercizi 34 e 35 qui sopra, dimostrare che il gruppo $U\big(A[[x]]\big)$ delle serie formali in x (a coefficienti in A) *invertibili* è dato da

$$U\big(A[[x]]\big) \;\; = \;\; \Big\{\, \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \in A[[x]] \;\Big|\; a_0 \in U(A) \,\Big\}$$