ESERCIZI SU
ANELLI E SOTTOANELLI

N.B.: il simbolo $\diamond$ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— * —

1 — Sia X un insieme, e sia $\mathcal{P}(X)$ il suo insieme delle parti. Indicando con Δ l'operazione di differenza simmetrica tra elementi di $\mathcal{P}(X)$, cioè

$$Y \Delta Z := (Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z) \quad \forall Y, Z \in \mathcal{P}(X)$$

si dimostri che $(\mathcal{P}(X); \Delta, \cap)$ è un anello commutativo e unitario, precisando quale ne sia l'unità. Si dimostri inoltre che, se $|X| > 1$, esistono in tale anello dei divisori di zero.

2 — Sia S un insieme di numeri primi. Definiamo

$$\mathbb{Z}_S := \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid \text{i fattori primi di } n \text{ sono tutti elementi di } S \right\}$$

Si dimostri che:

(a) $\mathbb{Z}_S$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.

(b) $\diamond$ Ogni sottoanello di $\mathbb{Q}$ contenente 1 è di tipo $\mathbb{Z}_S$, per un certo insieme di primi S .

3 — Dimostrare che il sottoinsieme $\mathbb{Z}[i]$ di $\mathbb{C}$ definito da

$$\mathbb{Z}[i] := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists a, b \in \mathbb{Z} : z = a + ib \right\}$$

è un sottoanello di $\mathbb{C}$ (detto *anello degli interi di Gauss*).

4 — Dato $d \in \mathbb{Z}$, dimostrare che il sottoinsieme $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ di $\mathbb{C}$ definito da

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists a, b \in \mathbb{Z} : z = a + b\sqrt{d} \right\}$$

è un sottoanello di $\mathbb{C}$, e inoltre è un sottoanello di $\mathbb{R}$ se $d \geq 0$.

Suggerimento: È una diretta generalizzazione dell'esercizio 3 qui sopra, che si (ri)-ottiene per $d := -1$.

5 — Sia $d \in \mathbb{Z}$, e sia A un sottoanello dell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ considerato nel precedente esercizio 4 qui sopra — tale che $1 \in A$.

Dimostrare che si ha necessariamente una delle due possibilità seguenti:

$$(1) \quad A = \mathbb{Z} \quad , \quad (2) \quad \exists k \in \mathbb{N}_+ \text{ tale che } A := \left\{ a + kb'\sqrt{d} \mid a, b' \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Suggerimento: Dall'ipotesi $1 \in A$ segue che $\mathbb{Z} \subseteq A$. Se vale l'uguaglianza siamo nel caso (1). Altrimenti, esiste in A un numero della forma $a + b\sqrt{d}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, e quindi anche — dato che $a \in \mathbb{Z} \subseteq A$ — si ha $b\sqrt{d} \in A$; ne segue che esiste un tale intero b di valore assoluto $|b|$ minimo possibile. Allora ponendo $k := |b|$ si ottiene (dimostrarlo!) l'identità in (2).

6 — Dato $d \in \mathbb{Z}$, dimostrare che il sottoinsieme $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ di $\mathbb{C}$ definito da

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists a, b \in \mathbb{Q} : z = a + b\sqrt{d} \right\}$$

è un sottoanello di $\mathbb{C}$, ed è sottoanello di $\mathbb{R}$ se $d \geq 0$. Inoltre, tale $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ è un campo.

Suggerimento: La prima parte dell'enunciato si dimostra come per l'esercizio 4 qui sopra. Per la seconda, si tratta di osservare che, dato $a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}] \setminus \{0\}$ — che corrisponde a $a, b \neq 0$ — il suo inverso $(a + b\sqrt{d})^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}}$ può esser scritto nella forma $(a + b\sqrt{d})^{-1} = \alpha + \beta\sqrt{d}$ per opportuni $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

7 — Sia R un anello. Dato un sottoinsieme S di R e un sottoanello A di R , siano

$$\begin{aligned} S' &:= \{ r \in R \mid rs = sr \ \forall s \in S \} \\ A' &:= \{ r \in R \mid ra = ar \ \forall a \in A \} \end{aligned}$$

(a) Dimostrare che S' e A' sono sottoanelli di R .

(b) Se R è unitario, dimostrare che anche S' e A' sono unitari.

(c) Dimostrare che $S'' \supseteq S$ e $A'' \supseteq A$.

(d) Se $S_1 \subseteq S_2$ sono due sottoinsiemi e $A_1 \subseteq A_2$ due sottoanelli in R inclusi l'uno nell'altro, dimostrare che $S'_1 \supseteq S'_2$ e $A'_1 \supseteq A'_2$.

(e) Dimostrare che $S' = \langle S \rangle'$, dove $\langle S \rangle$ è il sottoanello di R generato da S .

8 — Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di anelli. Nell'insieme prodotto cartesiano $\prod_{i \in I} A_i$, si considerino le operazioni

$$(a'_i)_{i \in I} \oplus (a''_i)_{i \in I} := (a'_i + a''_i)_{i \in I} \quad , \quad (a'_i)_{i \in I} \odot (a''_i)_{i \in I} := (a'_i \cdot a''_i)_{i \in I}$$

per ogni $(a'_i)_{i \in I}, (a''_i)_{i \in I} \in \{A_i\}_{i \in I}$. Dimostrare che:

(a) $(\{A_i\}_{i \in I}; \oplus, \odot)$ è un anello;

(b) $(\{A_i\}_{i \in I}; \oplus, \odot)$ è commutativo $\iff$ ogni A_i ($i \in I$) è commutativo;

(c) $(\{A_i\}_{i \in I}; \oplus, \odot)$ è unitario $\iff$ ogni A_i ($i \in I$) è unitario.

9 — Siano A un anello commutativo. Nell'insieme prodotto cartesiano $E_A := A \times A$, si considerino le operazioni $\boxplus$ e $\boxtimes$ definite — per ogni $(a, b), (c, d) \in E_A$ — come segue:

$$(a, b) \boxplus (c, d) := (a + c, b + d), \quad (a, b) \boxtimes (c, d) := (ac + bd, bc + ad)$$

Dimostrare che:

- (a) $(E_A; \boxplus, \boxtimes)$ è un anello;
- (b) se $|A| > 1$, l'anello E_A contiene divisori di zero;
- (c) se A è un dominio di integrità, i divisori di zero di E_A sono tutti e soli della forma (a, a) oppure $(a, -a)$, per ogni $a \in A$.

10 — Sia A un anello, e x un simbolo formale. Si definiscano

$$\begin{aligned} A[x] &:= \left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k \mid n \in \mathbb{N}, a_k \in A \ \forall k \right\} && \text{(polinomi)} \\ A[x, x^{-1}] &:= \left\{ \sum_{k=-m}^n a_k x^k \mid m, n \in \mathbb{N}, a_k \in A \ \forall k \right\} && \text{(polinomi di Laurent)} \\ A[[x]] &:= \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \mid a_k \in A \ \forall k \right\} && \text{(serie [formali])} \\ A((x)) &:= \left\{ \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k x^k \mid m \in \mathbb{N}, a_k \in A \ \forall k \right\} && \text{(serie di Laurent)} \end{aligned}$$

In ciascuno di tali insiemi, si definiscano le operazioni

$$\begin{aligned} \left(\sum_i a_i x^i \right) + \left(\sum_j \alpha_j x^j \right) &:= \sum_k (a_k + \alpha_k) x^k \\ \left(\sum_i a_i x^i \right) \cdot \left(\sum_j \alpha_j x^j \right) &:= \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i \alpha_j \right) x^k \end{aligned}$$

dove si deve intendere $a_i := 0$ oppure $\alpha_j := 0$ se l'indice i oppure j non compare esplicitamente tra quelli dell'elemento (polinomio, o serie, ecc.) in esame. Dimostrare che:

- (a) $A[x], A[x, x^{-1}], A[[x]]$ e $A((x))$ sono anelli rispetto alle suddette operazioni;
- (b) valgono le seguenti relazioni (dove “ $\leq$ ” significa “è sottoanello di”):
 $A \leq A[x] \leq A[x, x^{-1}] \leq A((x))$, $A \leq A[x] \leq A[[x]] \leq A((x))$;
- (c) gli anelli in (a) sono commutativi se e soltanto se l'anello A è commutativo;
- (d) se l'anello A è unitario, allora gli anelli in (a) sono unitari — e si specifichi quale ne sia l'elemento unità;
- (e) gli anelli in (a) sono integri — cioè privi di divisori di zero — se e soltanto se l'anello dei coefficienti A è integro.

11 — Sia A un anello unitario, x un simbolo formale, e si adottino le notazioni dell'Esercizio 10 qui sopra; inoltre, per ogni anello unitario R si denoti con $U(R)$ il sottoinsieme degli elementi invertibili di R . Posto $x^{\mathbb{Z}} := \{x^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$, dimostrare che:

$$(a) \quad U(A[x, x^{-1}]) = U(A[x]) x^{\mathbb{Z}} = \left\{ p(x) x^z \mid p(x) \in U(A[x]), z \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$(b) \text{ la moltiplicazione in } A[x, x^{-1}] \text{ fornisce (per restrizione) isomorfismi di gruppi}$$

$$U(A[x]) \times x^{\mathbb{Z}} \cong U(A[x, x^{-1}]) \quad \text{e} \quad x^{\mathbb{Z}} \times U(A[x]) \cong U(A[x, x^{-1}])$$

(c) se A è intero, allora

$$U(A[x]) = U(A) \quad , \quad U(A[x, x^{-1}]) = \left\{ a x^z \mid a \in U(A), z \in \mathbb{Z} \right\}$$

Suggerimento: La parte (a) segue facilmente da $x^{\mathbb{Z}} \subseteq U(A[x, x^{-1}])$ e dall'osservazione che un prodotto di due fattori commutanti tra loro è invertibile se e soltanto se i due fattori sono invertibili... La parte (b) segue direttamente dalla parte (a). Nella parte (c), il secondo enunciato segue dal primo e dalla parte (a).

12 $\hat{\diamond}$ — Sia A un anello unitario, x un simbolo formale, e si adottino le notazioni dell'esercizio 10 qui sopra; inoltre, per ogni anello unitario R si denoti con $U(R)$ il sottoinsieme degli elementi invertibili di R . Dimostrare che

$$(a) \quad U(A[[x]]) = \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \in A[[x]] \mid a_0 \in U(A) \right\}$$

$$(b) \quad U(A((x))) = \left\{ \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k x^k \in A((x)) \mid a_{-m} \in U(A) \right\}$$

Suggerimento: La parte (b) segue direttamente dalla parte (a) e dall'osservazione che $A((x)) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} x^{-m} A[[x]]$. La parte (a) segue dall'osservazione che:

$$- [1] \text{ se } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \in U(A[[x]]), \text{ allora } a_0 \in U(A);$$

$$- [2] \text{ per ogni } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \in A[[x]] \text{ con } a_0 \in U(A) \text{ si ha}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \in U(A[[x]]) \iff a_0^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \in U(A[[x]])$$

dove $a_0^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_0^{-1} a_k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_0^{-1} a_k x^k$ è una serie che "comincia" con 1;

$$- [3] \text{ nell'anello } A[[y]] \text{ vale l'identità } (1-y) \sum_{k=0}^{+\infty} y^k = 1, \text{ che significa che esiste}$$

$$(1-y)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} y^k \in A[[y]], \text{ dunque } (1-y) \in U(A[[y]]);$$

$$- [4] \text{ applicando le conclusioni in [3] a } y := -\sum_{k=1}^{+\infty} a_0^{-1} a_k x^k \text{ si ottiene che (con qualche}$$

precisazione tecnica) che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_0^{-1} a_k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_0^{-1} a_k x^k$ considerata in [2] è invertibile in $A[[x]]$;

— [5] dai punti [4] e [2] possiamo concludere che ogni serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ con $a_0 \in U(A)$ è invertibile in $A[[x]]$, e da questo insieme a [1] otteniamo l'enunciato in (a).

13 — Sia A un anello unitario, $A[[x]]$ e $A((x))$ come nell'esercizio 12 qui sopra, e

$$\Gamma_{A[[x]]} := 1 + x A[[x]] = \{ 1 + x f(x) \mid f(x) \in A[[x]] \} \quad , \quad x^{\mathbb{Z}} := \{ x^z \mid z \in \mathbb{Z} \}$$

Dimostrare che:

(a) valgono le seguenti relazioni tra (sotto)gruppi moltiplicativi:

$$\Gamma_{A[[x]]} \leq U(A[[x]]) \leq U(A((x))) \quad , \quad x^{\mathbb{Z}} \leq Z(U(A((x)))) \leq U(A((x)))$$

e quindi in particolare $x^{\mathbb{Z}} \leq U(A((x)))$;

(b) la moltiplicazione nel gruppo $U(A[[x]])$ si restringe ad un isomorfismo di gruppi

$$x^{\mathbb{Z}} \times U(A[[x]]) \xrightarrow{\cong} U(A((x))) \quad , \quad (x^z, f(x)) \mapsto x^z f(x)$$

14 — Sia A un anello, e S un insieme. Nell'insieme A^S di tutte le applicazioni da S ad A , si definiscano operazioni $+$ e $\cdot$ come segue:

$$(f + g)(s) := f(s) + g(s) \quad , \quad (f \cdot g)(s) := f(s) \cdot g(s) \quad (\forall s \in S) \quad \forall f, g \in A^S .$$

Dimostrare che:

(a) A^S è un anello rispetto alle due operazioni suddette;

(b) se A è unitario, allora A^S è unitario, precisando quale sia la sua unità;

(c) se $|A| > 1$ e $|S| > 1$, allora A^S non è integro (cioè possiede divisori di zero).

15 — Sia A un anello, A^A l'insieme delle endofunzioni di A (cioè le funzioni da A in sé stesso), e consideriamo in A^A l'operazione “ $+$ ” definita come nell'esercizio 14 qui sopra e l'operazione “ $\circ$ ” di composizione.

(a) Dimostrare che in generale la terna $(A^A; +, \circ)$ non è un anello.

(b) $\hat{\diamond}$ Determinare condizioni (sull'anello A) necessarie e sufficienti affinché la suddetta terna $(A^A; +, \circ)$ sia un anello.

16 — Sia $(\Gamma; +)$ un gruppo abeliano. Nell'insieme $End(\Gamma)$ di tutti gli endomorfismi di $(\Gamma; +)$, si definiscano operazioni $+$ e $\circ$ come segue:

$$(\varphi + \psi)(\gamma) := \varphi(\gamma) + \psi(\gamma) \quad , \quad (\varphi \circ \psi)(\gamma) := \varphi(\psi(\gamma)) \quad (\forall \gamma \in \Gamma) \quad \forall \varphi, \psi \in End(\Gamma) .$$

Dimostrare che $(End(\Gamma); +, \circ)$ è un anello unitario.

17 — Sia Γ un gruppo abeliano, e sia $\text{End}(\Gamma)$ l'insieme di tutti gli endomorfismi di Γ , con la sua struttura di anello unitario canonica (introdotta nell'esercizio 16 qui sopra). Sia Λ un sottogruppo di Γ , e $\text{End}^\Lambda(\Gamma) := \{ \varphi \in \text{End}(\Gamma) \mid \varphi(\Lambda) \subseteq \Lambda \}$.

Dimostrare che $\text{End}^\Lambda(\Gamma)$ è un sottoanello di $\text{End}(\Gamma)$, contenente l'identità.

18 — Dato un anello A ed un semigruppato $\mathcal{S}$, si definisca l'insieme

$$A[\mathcal{S}] := \left\{ \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} a_\sigma \sigma \mid a_\sigma \in A, \forall \sigma \in \mathcal{S} \right\}$$

e in esso le operazioni $+$ e $\cdot$ date da

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\eta \in \mathcal{S}} a'_\eta \eta \right) + \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{S}} a''_\kappa \kappa \right) &:= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} (a'_\sigma + a''_\sigma) \sigma \\ \left(\sum_{\eta \in \mathcal{S}} a'_\eta \eta \right) \cdot \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{S}} a''_\kappa \kappa \right) &:= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \left(\sum_{\eta, \kappa \in \mathcal{S} : \eta \kappa = \sigma} a'_\eta a''_\kappa \right) \sigma \end{aligned}$$

Dimostrare che:

- (a) $A[\mathcal{S}]$ è un anello rispetto alle due operazioni suddette;
- (b) $A[\mathcal{S}]$ è commutativo $\iff A$ e G sono commutativi;
- (c) se A è unitario e $\mathcal{S}$ è un monoide, allora $A[\mathcal{S}]$ è unitario, precisando quale sia la sua unità;

(d) se A è unitario e $\mathcal{S}$ è un monoide, allora $U(A[\mathcal{S}]) \supseteq U(\mathcal{S})$, dove identifichiamo ogni elemento $\sigma \in \mathcal{S}$ con il corrispondente elemento di $A[\mathcal{S}]$ dato da $\sum_{\nu \in \mathcal{S}} \delta_{\nu, \sigma} \sigma$.

19 — Con la notazione dell'esercizio 18 qui sopra, per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ si considerino i due semigruppato additivi $\mathbb{N}^n := (\mathbb{N}^n; +)$ e $\mathbb{Z}^n := (\mathbb{Z}^n; +)$ ottenuti come prodotto diretto di n copie di $(\mathbb{N}; +)$ con sé stesso e di n copie di $(\mathbb{Z}; +)$ con sé stesso.

Dimostrare che per ogni anello A esistono isomorfismi di anelli (canonici)

$$A[\mathbb{N}^n] \cong A[x_1, \dots, x_n] \quad , \quad A[\mathbb{Z}^n] \cong A[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$$

20 — Dati un A un anello e $n \in \mathbb{N}_+$, consideriamo l'insieme $M_n(A) := \text{Mat}_{n \times n}(A)$ delle matrici (quadrato!) $n \times n$ a coefficienti in A . Dimostrare che:

- (a) rispetto alle operazioni di somma coefficiente per coefficiente e di prodotto righe per colonne, $M_n(A)$ è un anello;
- (b) se l'anello A è unitario, allora anche l'anello $M_n(A)$ è unitario;
- (c) se $n > 1$ e $A \neq \{0\}$, allora $M_n(A)$ è non integro;
- (d) se $n > 1$ e $A \cdot A \neq \{0\}$, allora $M_n(A)$ è non commutativo.

Suggerimento: I punti (a) e (b) si ottengono per verifica diretta.

Per i punti (c) e (d), si studi prima il caso $n = 2$, cercando due matrici non nulle che abbiano prodotto la matrice nulla — per (c) — e due matrici che non commutino tra loro

— per (d). Poi il caso generale si ottiene da quello $n = 2$ “immergendo” tra le matrici $n \times n$ quelle 2×2 come opportune matrici a blocchi...

21 — Sia A un anello, R un sottoanello di A ; sia poi $M_n(A)$ l’anello delle matrici quadrate di taglia n a coefficienti nell’anello A introdotto nell’Esercizio 20 qui sopra, $M_n(R)$ l’analogo anello per R , che identifichiamo (in modo ovvio) ad un sottoinsieme di $M_n(A)$.

Dimostrare che allora $M_n(R)$ è sottoanello di $M_n(A)$.

22 $\diamond$ — Sia A un anello unitario, sia $n \in \mathbb{N}_+$, e sia $M_n(A)$ l’anello delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A . Dimostrare che il centro dell’anello $M_n(A)$ è dato da

$$Z(M_n(A)) = \{ \text{diag}(z, z, \dots, z) \mid z \in Z(A) \}$$

dove $\text{diag}(z, z, \dots, z) := \begin{pmatrix} z & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z \end{pmatrix}$ indica la matrice scalare che ha sulla

diagonale il coefficiente z (ripetuto n volte, in tutte le posizioni).

Suggerimento: Per centro di un anello R intendiamo

$$Z(R) := \{ z \in R \mid zr = rz, \forall r \in R \} .$$

Sia $E_{h,k} := (\delta_{i,h} \delta_{k,j})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n; i=1, \dots, n}$ la matrice elementare con 1_A in posizione (r, s) e 0_A altrove (per ogni r ed s). Data una matrice $M = (m_{i,j})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n; i=1, \dots, n}$, si ha $E_{h,k} \cdot M \cdot E_{p,q} = m_{k,p} E_{h,q}$. Se $M \in Z(M_n(A))$ allora $E_{h,k} \cdot M \cdot E_{p,q} = M \cdot E_{h,k} \cdot E_{p,q} = \delta_{k,p} M \cdot E_{h,q}$, per cui si ha $m_{k,p} = 0$ per $k \neq p$, dunque M è una matrice diagonale $M = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Utilizzando una matrice di permutazione $P_\sigma := (\delta_{i, \sigma(j)})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n; i=1, \dots, n}$ — con $\sigma \in \mathcal{S}_n$ una permutazione di $\{1, \dots, n\}$ — si ottiene $P_\sigma \cdot M \cdot P_\sigma^{-1} = P_\sigma \cdot \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot P_\sigma^{-1} = \text{diag}(\mu_{\sigma(1)}, \dots, \mu_{\sigma(n)})$. D’altra parte, poiché $M \in Z(M_n(A))$ abbiamo anche $P_\sigma \cdot M \cdot P_\sigma^{-1} = M$, e quindi ricaviamo che $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n =: \mu$. Perciò $M = \text{diag}(\mu, \dots, \mu)$ è una matrice scalare! Infine, dovendo M commutare in particolare con tutte le matrici scalari (che formano un sottoanello di $M_n(A)$ isomorfo ad A), otteniamo che $\mu \in Z(A)$.

23 $\diamond$ — Sia A un anello unitario, sia $n \in \mathbb{N}_+$, e sia $GL_n(A)$ il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili a coefficienti in A . Dimostrare che il centro di $GL_n(A)$ è dato da

$$Z(GL_n(A)) = \{ \text{diag}(z, z, \dots, z) \mid z \in Z(A) \cap U(A) \}$$

dove $\text{diag}(z, z, \dots, z)$ indica una matrice scalare — come nell'esercizio 6 — e $U(A)$ è il gruppo degli elementi invertibili in A .

Suggerimento: Per centro di un gruppo G intendiamo

$$Z(G) := \{ g \in G \mid g\gamma = \gamma g, \forall \gamma \in G \} .$$

Osserviamo che $(I_n + E_{h,k}) \in GL_n(A)$ per ogni $h \neq k$, dove I_n è la matrice identità (di taglia n). Allora, data una matrice $M \in Z(GL_n(A))$ si ha $(I_n + E_{h,k}) \cdot M = M \cdot (I_n + E_{h,k})$ che equivale a $E_{h,k} \cdot M = M \cdot E_{h,k}$: come nell'esercizio 22 qui sopra, questo implica che M sia una matrice scalare. Siccome le matrici di permutazione P_σ stanno in $GL_n(A)$ — per ogni $\sigma \in \mathcal{S}_n$ — si può procedere come prima e concludere che M è diagonale, del tipo $M = \text{diag}(\mu, \dots, \mu)$ con $\mu \in Z(A)$. Infine, $M = \text{diag}(\mu, \dots, \mu)$ è invertibile (come matrice) se e soltanto se μ è invertibile (in A), cioè $\mu \in U(A)$, q.e.d.

24 — Dati un A un anello e $n \in \mathbb{N}_+$, consideriamo l'insieme $M_n(A)$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A , con la sua struttura di anello rispetto alla somma coefficiente per coefficiente e al prodotto righe per colonne. Siano $B_n^+(A)$ e $B_n^-(A)$ i sottoinsiemi delle matrici triangolari superiori e delle matrici triangolari inferiori rispettivamente, cioè

$$\begin{aligned} t_n^+(A) &:= \left\{ (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(A) \mid a_{i,j} = 0 \quad \forall i > j \right\} \\ t_n^-(A) &:= \left\{ (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(A) \mid a_{i,j} = 0 \quad \forall i < j \right\} \end{aligned}$$

Dimostrare che $t_n^+(A)$ e $t_n^-(A)$ sono sottoanelli di $M_n(A)$.

25 — Sia A un anello. Consideriamo l'insieme delle matrici “triangolari superiori infinite” a coefficienti in A , cioè l'insieme

$$t_\infty^+(A) := \left\{ M = (m_{i,j})_{i=1,2,\dots}^{j=1,2,\dots} \mid m_{i,j} \in A \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_+, m_{i,j} = 0 \quad \forall i > j \right\}$$

e l'analogo insieme delle matrici “triangolari inferiori infinite” a coefficienti in A , cioè

$$t_\infty^-(A) := \left\{ M = (m_{i,j})_{i=1,2,\dots}^{j=1,2,\dots} \mid m_{i,j} \in A \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_+, m_{i,j} = 0 \quad \forall i < j \right\}$$

Dimostrare che:

(a) entrambi $t_\infty^+(A)$ e $t_\infty^-(A)$ sono anelli rispetto alle operazioni di somma “componente per componente” e di prodotto “righe per colonne” date dalle formule usuali;

(b) se A è unitario, allora gli anelli $t_\infty^\pm(A)$ sono entrambi unitari.

26 — Sia A un anello. Con le notazioni dell'esercizio 25 qui sopra, consideriamo il sottoinsieme $t_{\infty}^{\pm;f}(A)$ di $t_{\infty}^{\pm}(A)$ definito così:

$$\begin{aligned} t_{\infty}^{+;f}(A) &:= \left\{ M = (m_{i,j})_{i=1,2,\dots}^{j=1,2,\dots;} \in t_{\infty}^{+}(A) \mid m_{i,j} = 0 \ \forall j \gg 0 \right\} \\ t_{\infty}^{-;f}(A) &:= \left\{ M = (m_{i,j})_{i=1,2,\dots}^{j=1,2,\dots;} \in t_{\infty}^{-}(A) \mid m_{i,j} = 0 \ \forall i \gg 0 \right\} \end{aligned}$$

Dimostrare che $t_{\infty}^{\pm;f}(A)$ è sottoanello di $t_{\infty}^{\pm}(A)$.

27 $\diamondsuit$ — Sia A un anello unitario. Con le notazioni dell'esercizio 25 qui sopra, consideriamo l'insieme delle matrici “triangolari superiori infinite *invertibili*” (a coefficienti in A) e l'insieme delle matrici “triangolari inferiori infinite *invertibili*” (a coefficienti in A), cioè i due gruppi $T_{\infty}^{\pm}(A) := U(t_{\infty}^{\pm}(A))$ degli elementi invertibili nei due anelli $t_{\infty}^{\pm}(A)$.

Dimostrare che i gruppi $T_{\infty}^{\pm}(A)$ sono descritti esplicitamente da

$$T_{\infty}^{\pm}(A) := \left\{ M = (m_{i,j})_{i=1,2,\dots}^{j=1,2,\dots;} \in t_{\infty}^{\pm}(A) \mid m_{\ell,\ell} \in U(A) \ \forall \ell \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

28 $\diamondsuit$ — Sia A un anello unitario. Con le notazioni dell'esercizio 31 qui sopra, consideriamo il sottoinsieme $T_{\infty}^{\pm;f}(A)$ di $T_{\infty}^{\pm}(A)$ dato da

$$\begin{aligned} T_{\infty}^{+;f}(A) &:= \left\{ M = (m_{i,j})_{i=1,2,\dots}^{j=1,2,\dots;} \in T_{\infty}^{+}(A) \mid m_{i,j} = 0 \ \forall j \gg 0 \right\} \\ T_{\infty}^{-;f}(A) &:= \left\{ M = (m_{i,j})_{i=1,2,\dots}^{j=1,2,\dots;} \in T_{\infty}^{-}(A) \mid m_{i,j} = 0 \ \forall i \gg 0 \right\} \end{aligned}$$

Dimostrare che $T_{\infty}^{\pm;f}(A)$ è sottogruppo di $T_{\infty}^{\pm}(A)$.

29 — Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ di tutte le successioni di numeri reali, con la sua struttura naturale di anello (come definita nell'esercizio 14). Sia poi $Conv(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formato da tutte le successioni *convergenti* (cioè per le quali esista limite finito), e analogamente sia $Div(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formato da tutte le successioni *divergenti* (cioè per le quali esista limite infinito positivo oppure infinito negativo); infine, sia $Boun(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formato da tutte le successioni *limitate*, cioè i cui valori siano compresi in un intervallo finito $[a, b]$ con $a \leq b$ in $\mathbb{R}$ (dipendenti dalla successione limitata in esame). Dimostrare che

- (a) $Boun(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ è sottoanello di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
- (b) $Conv(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ è sottoanello di $Boun(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, e quindi anche di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
- (c) $Div(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ non è sottoanello di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

30 — Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ delle endofunzioni di $\mathbb{R}$ con la sua struttura naturale di anello (come definita nell'esercizio 14). Sia poi $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ delle funzioni *continue*, e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ delle funzioni *differenziabili di classe k* (cioè derivabili k volte con derivata k -esima continua). Dimostrare che

- (a) $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ è sottoanello di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;
 - (b) $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$ è sottoanello di $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ — e quindi anche di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ — per ogni $k \in \mathbb{N}$.
-
-