

ESERCIZI sulle ALGEBRE di BOOLE

— Fabio GAVARINI —

N.B.: il simbolo $\hat{\diamond}$ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— * —

1 $\hat{\diamond}$ — Sia A un anello *booleano*, tale cioè che $a^2 = a$ per ogni $a \in A$. Dimostrare che:

(a) per ogni $a \in A$ si ha $-a = a$;

(b) per ogni $a_1, a_2 \in A$ si ha $a_1 a_2 = a_2 a_1$ (in altre parole, A è un anello *commutativo*).

2 — Sia B un'algebra di Boole. Dimostrare che per ogni $x, y \in B$ si ha

$$(x \vee y) \wedge (x \wedge y)' = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

3 (Teorema di Equivalenza di Stone — da *algebre di Boole a anelli booleani unitari*)

$\hat{\diamond}$ — Sia B un'algebra di Boole. Si considerino in B le due operazioni binarie $+$ e $\cdot$ definite da

$$x + y := \begin{cases} (x \vee y) \wedge (x \wedge y)' \\ (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \end{cases}, \quad x \cdot y := x \wedge y \quad \forall x, y \in B$$

Dimostrare che $(B; +, \cdot)$ è un anello booleano unitario.

4 (Teorema di Equivalenza di Stone — da *anelli booleani unitari a algebre di Boole*)

$\hat{\diamond}$ — Sia B un anello booleano unitario. Si considerino in B le due operazioni binarie $\vee$ e $\wedge$ definite da

$$x \vee y := x + y + (x \cdot y) \quad , \quad x \wedge y := x \cdot y \quad \forall x, y \in B$$

Dimostrare che $(B; \vee, \wedge)$ è un'algebra di Boole.

5 — Sia dato un reticolo L la cui cardinalità sia rispettivamente $|L| = 24$, $|L| = 32$, $|L| = 25$. In ciascuno di tali casi, si determini se L possa essere un'algebra di Boole.

6 — Dato un reticolo limitato e distributivo L , si consideri il suo sottoinsieme

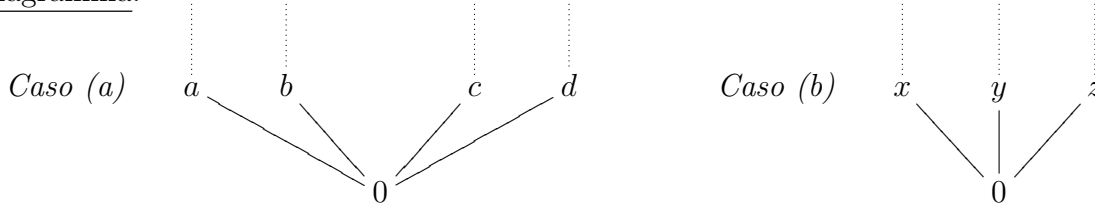
$$\mathcal{B}_L := \{ \ell \in L \mid \exists \ell' \in L \}$$

dove ℓ' indica un complemento di ℓ nel senso standard. Dimostrare che $\mathcal{B}_L$, relativamente alla restrizione delle operazioni $\vee$ e $\wedge$ di L , è un'algebra di Boole.

7 — Si consideri un reticolo finito L , con minimo $0 := \min(L)$, tale che la sua cardinalità e la “parte inferiore” del suo diagramma di Hasse siano di uno dei tipi seguenti:

Cardinalità: (a) $|L| = 8$, (b) $|L| = 16$

Diagramma:



In ciascuno dei due casi, determinare se il reticolo L possa essere un'algebra di Boole.

8 (*Prodotto diretto di algebre di Boole*) — Siano $B_1, B_2, \dots, B_k$ delle algebre di Boole. Nel prodotto cartesiano $B_1 \times B_2 \times \dots \times B_k$ si considerino le due operazioni binarie $\vee$ e $\wedge$ definite componente per componente, cioè

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \vee (y_1, y_2, \dots, y_k) := (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \dots, x_k \vee y_k)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \wedge (y_1, y_2, \dots, y_k) := (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \dots, x_k \wedge y_k)$$

per ogni $(x_1, x_2, \dots, x_k), (y_1, y_2, \dots, y_k) \in B_1 \times B_2 \times \dots \times B_k$.

Verificare che $(B_1 \times B_2 \times \dots \times B_k; \vee, \wedge)$ è un'algebra di Boole, precisando in particolare quali siano il minimo e il massimo e quale sia la forma esplicita del complemento di un generico elemento in $B_1 \times B_2 \times \dots \times B_k$.

9 — Sia $\underline{2} := \{0, 1\}$ con la sua struttura standard di algebra di Boole, e per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ nel prodotto cartesiano $\underline{2}^{\times n} := \underbrace{\underline{2} \times \dots \times \underline{2}}_{n \text{ volte}}$ consideriamo la struttura di algebra

di Boole “prodotto diretto” di cui all'esercizio **8** qui sopra. Dimostrare che per ogni insieme X tale che $|X| = n$ l'algebra di Boole $\mathcal{P}(X)$ è isomorfa a $\underline{2}^{\times n}$, esibendo un isomorfismo esplicito.

10 — Sia $\varphi : (E_1; \preceq) \hookrightarrow (E_2; \preceq)$ una biiezione tra insiemi ordinati tale che $\varphi(x) \preceq \varphi(y) \iff x \preceq y$, per ogni $x, y \in E_1$. Dimostrare che:

$$(a) \quad \exists \max(E_1) \iff \exists \max(E_2), \quad \text{e in tal caso si ha } \varphi(\max(E_1)) = \max(E_2);$$

$$(b) \quad \exists \min(E_1) \iff \exists \min(E_2), \quad \text{e in tal caso si ha } \varphi(\min(E_1)) = \min(E_2).$$

11 — Sia $\varphi : B_1 \hookrightarrow B_2$ un isomorfismo tra algebre di Boole. Dimostrare che:

$$(a) \quad \varphi(1_{B_1}) = 1_{B_2}, \quad \varphi(0_{B_1}) = 0_{B_2};$$

$$(b) \quad \varphi(b') = (\varphi(b))' \quad \text{per ogni } b \in B_1.$$

12 — Sia B un'algebra di Boole, e sia C una sottoalgebra di Boole di B . Dimostrare che $0_B \in C$ e $1_B \in C$.

13 — Sia B un'algebra di Boole. Dimostrare che per ogni $x, y \in B$ valgono le seguenti identità:

- (a) $x \vee (x' \wedge y) = x \vee y$,
- (b) $x \wedge (x' \vee y) = x \wedge y$,
- (c) $(x \wedge y) \vee ((x \vee y') \wedge y)' = 1$.

14 — Sia B un'algebra di Boole. Dimostrare che per ogni $x, y \in B$ si ha:

$$x \leq y \iff x' \vee y = 1 \iff x \wedge y' = 0 \iff y' \leq x'$$

15 — Sia L un reticolo, e siano $\ell_-, \ell_+ \in L$ tali che $\ell_- \leq \ell_+$. Consideriamo in L l'intervallo di estremi ℓ_- e ℓ_+ , cioè

$$[\ell_-, \ell_+] := \{ \ell \in L \mid \ell_- \leq \ell \leq \ell_+ \}$$

Dimostrare che:

- (a) $[\ell_-, \ell_+] := \{ \ell \in L \mid \ell \vee \ell_- = \ell, \ell \wedge \ell_+ = \ell \}$;
- (b) $[\ell_-, \ell_+]$ è un sottoreticolo di L ;
- (c) $\ell_- \vee (\lambda \wedge \ell_+) = (\ell_- \vee \lambda) \wedge \ell_+$ per ogni $\lambda \in L$;
- (d) se L è un'algebra di Boole, allora il reticolo $[\ell_-, \ell_+]$ è a sua volta un'algebra di Boole, in cui il complemento di un elemento ℓ è dato da

$$\ell^\vee := \ell_- \vee (\ell' \wedge \ell_+) = (\ell_- \vee \ell') \wedge \ell_+$$

dove ℓ' indica il complemento di ℓ nell'algebra di Boole L .

16 — Sia B un'algebra di Boole. Dimostrare che per ogni $x, y \in B$ si ha:

$$x \leq y \iff x' \vee y = 1 \iff x \wedge y' = 0 \iff y' \leq x'$$

17 — Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia D_n il reticolo dei divisori di n (con la relazione d'ordine di divisibilità). Verificare che:

- (a) D_{900} non è un'algebra di Boole;
- (b) D_{30} è un sottoreticolo di D_{900} ;
- (c) D_{30} è un'algebra di Boole;
- (d) D_{15} è un'algebra di Boole;
- (e) D_{15} è un sottoreticolo di D_{30} ;
- (f) D_{15} non è sottoalgebra di Boole di D_{30} .

18 — Si consideri l'insieme $\mathcal{P}(\{S, P, Q, R\})$ con la sua struttura standard di algebra di Boole. Indichiamo con $\mathcal{L}$ il minimo (rispetto alla relazione di inclusione) sottoreticolo di $\mathcal{P}(\{S, P, Q, R\})$ che contenga i tre elementi $\{S, P\}$, $\{Q, R\}$ e $\{P, R\}$.

- (a) Disegnare il diagramma di Hasse di $\mathcal{L}$.
- (b) Dimostrare che $\mathcal{L}$ non è sottoalgebra di Boole di $\mathcal{P}(\{S, P, Q, R\})$.
- (c) Dimostrare che $\mathcal{L}$ non è un'algebra di Boole.

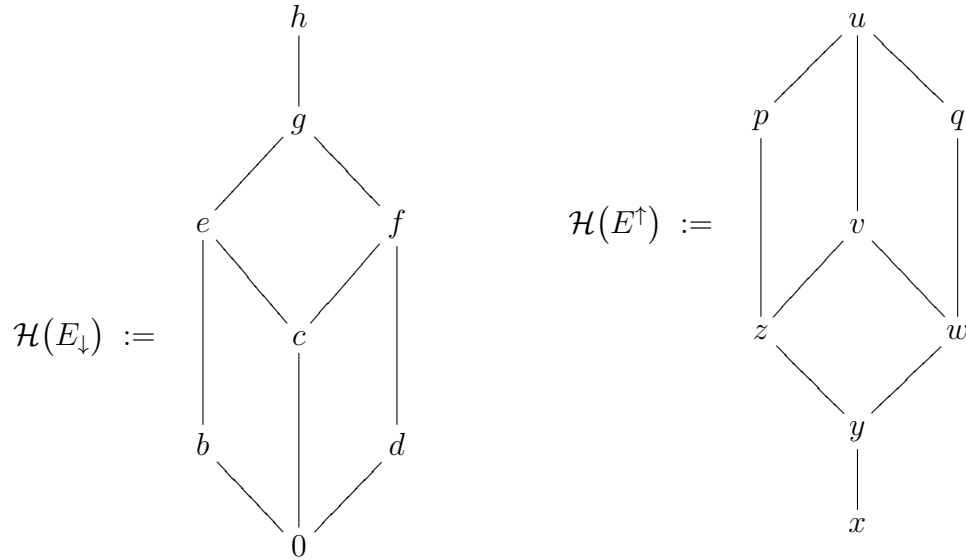
19 — Si consideri l'insieme $\mathcal{P}(\{\epsilon, \mathcal{L}, \mathcal{Y}, \$\})$ con la sua struttura standard di algebra di Boole. Indichiamo con rispettivamente $\mathcal{B}_-$ la minima (rispetto alla relazione di inclusione) sottoalgebra di Boole di $\mathcal{P}(\{\epsilon, \mathcal{L}, \mathcal{Y}, \$\})$ che contenga i tre elementi $\{\epsilon, \mathcal{Y}\}$, $\{\mathcal{L}, \$\}$ e $\{\epsilon, \mathcal{L}, \mathcal{Y}\}$ e con $\mathcal{B}_+$ la minima sottoalgebra di Boole di $\mathcal{P}(\{\epsilon, \mathcal{L}, \mathcal{Y}, \$\})$ che contenga i quattro elementi $\{\epsilon, \mathcal{Y}\}$, $\{\mathcal{L}, \$\}$, $\{\epsilon, \mathcal{L}, \mathcal{Y}\}$ e $\{\epsilon\}$.

- (a) Dimostrare che

$$\mathcal{B}_- = \{\emptyset, \{\$, \}, \{\mathcal{L}\}, \{\epsilon, \mathcal{Y}\}, \{\mathcal{L}, \$\}, \{\epsilon, \mathcal{L}, \mathcal{Y}\}, \{\epsilon, \$, \mathcal{Y}\}, \{\epsilon, \mathcal{L}, \$, \mathcal{Y}\}\}$$
- (b) Dimostrare che

$$\mathcal{B}_+ = \mathcal{P}(\{\epsilon, \mathcal{L}, \mathcal{Y}, \$\})$$

20 — Si considerino i due insiemi ordinati a $(E_\downarrow; \preceq)$ e $(E_\uparrow; \preceq)$ i cui diagrammi di Hasse siano i seguenti:



- (a) Verificare che $E_\downarrow$ e $E_\uparrow$ sono reticoli.
- (b) Determinare se i reticoli $E_\downarrow$ e $E_\uparrow$ siano distributivi.
- (c) Verificare che i reticoli $E_\downarrow$ e $E_\uparrow$ non sono algebre di Boole.