1. (a) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = 20$;
   (b) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = -12$;
   (c) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = 3$.

2. Determinare tutte le soluzioni $x \in \mathbf{Z}$ delle seguenti congruenze
   (a) $x \equiv 3 \pmod{11}$; (b) $3x \equiv 1 \pmod{5}$; (c) $9x \equiv 0 \pmod{30}$.

3. Stabilire se per le seguenti congruenze esistono soluzioni $x \in \mathbf{Z}$. In caso affermativo, determinarle tutte. (a) $5x \equiv 8 \pmod{17}$ (b) $9x \equiv 26 \pmod{30}$.

4. Determinare tutte le soluzioni $x \in \mathbf{Z}$ dei seguenti sistemi di congruenze
   (a) $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{8}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5x \equiv 4 \pmod{8}, \\ 3x \equiv 3 \pmod{5}, \\ 2x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 9x \equiv 20 \pmod{8}, \\ x \equiv -2 \pmod{5}, \\ -8x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$

5. Sia $x = x_n x_{n-1} \ldots x_0$ un numero intero positivo rappresentato in base 10. Far vedere che $x \equiv x_0 - x_1 + x_2 - \ldots + (-1)^n x_n \pmod{11}$. Decidere se 1213141516171819 è divisibile per 11.

6. (a) Per $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ determinare il resto della divisione per $p = 7$ di 5^k.
   (b) Stessa domanda, ma per per $p = 11$ e per $p = 13$.
   (c) Determinare il resto delle divisioni per 7, per 11 e per 13 di 5^{2016}; determinare il resto della divisione per 1001 di 5^{2016} (si noti che $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$).

7. Per i seguenti insiemi G e "composizioni" $*$, indicare, se esiste, un elemento neutro. Dire quando si tratta di un gruppo:
   (a) $G = \mathbf{Z}_{>0}$ con $a * b = a^b$.
   (b) $G = \mathbf{R}$ con $a * b = a + b + 3$,
   (c) $G = \mathbf{R}_{>1}$ con $a * b = a^{\log(b)}$.
   (d) $G = \{-1, 0, 1\}$ con $a * b = a + b$.
   (e) $G = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ con $a * b = \max(a, b)$.
   (f) $G = \mathbf{R}^2$ con $\binom{a}{b} * \binom{c}{d} = \binom{c+ad}{bd}$.

8. (a) Sia G un gruppo e siano $a, b \in G$. Dimostrare che l'unica soluzione dell'equazione
   $$ax = b$$
   in G è data da $x = a^{-1}b$. Similmente, dimostare che esiste una unica soluzione $x \in G$ di $xa = b$, vale a dire $x = ba^{-1}$.
   (b) (Proprietà Sudoku) Provare che, nella tabella di composizione di un gruppo finito, ogni elemento compare esattamente una volta in ogni riga ed ogni colonna.

9. Sia X un insieme e sia $P(X)$ l'insieme delle parti di X. *La differenza simmetrica* $A \triangle B$ di due sottoinsiemi A e B di X è definita da
   $$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B).$$
   Dimostrare che $P(X)$ con la composizione $\triangle$ è un gruppo abeliano. Scrivere la tabella di composizione per un insieme X di due elementi.

10. Sia G un gruppo con elemento neutro e.
    (a) Provare: se $x^2 = e$ per ogni $x \in G$, allora G è commutativo.
    (b) Provare: se $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$ per ogni $a, b \in G$, allora G è commutativo.
    (c) Provare: se $a^2b^2 = (ab)^2$ per ogni $a, b \in G$, allora G è commutativo.