1. Dire se i seguenti ideali degli anelli $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ e $\mathbf{Z}_3[X]$ sono primi o meno:

$$(X^3 - 18X + 12), \quad (X^3 - 18X + 12, 5), \quad (X^3 - 18X + 12, X - 1).$$

(Sono richieste quindi $3 \times 3 = 9$ risposte ...)

2. Dire se il polinomio $X^3 - 2$ è irriducibile o meno negli anelli $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Z}_7[X]$, $\mathbf{Z}_{31}[X]$.

3. Fattorizzare il polinomio $X^6 - 1$ in $\mathbf{C}[X]$, $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{Z}_3[X]$, $\mathbf{Z}_5[X]$.

4. Decidere se il polinomio $X^5 + X^3 + 1$ è irriducibile o meno negli anelli $\mathbf{Z}_2[X]$, $\mathbf{Z}_3[X]$, $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ e $\mathbf{R}[X]$.

5. Il polinomio *reciproco* di $f = \sum_{j=0}^n a_j X^j \in \mathbf{Q}[X]$ (con a_0, a_n diversi da 0) è il polinomio $f^\vee = \sum_{j=0}^n a_{n-j} X^j \in \mathbf{Q}[X]$. Dimostrare che f è irriducibile se e solo se $f^\vee$ è irriducibile.

6. Fattorizzare i seguenti elementi dell'anello R in fattori irriducibili di R .

- (a) $X^3 - Y^3$ con $R = \mathbf{Q}[X, Y]$;
- (b) $X^3 - X^2 - 8X + 6$ con $R = \mathbf{Z}[X]$;
- (c) $X^4 - X^2 + 4X + 3$ con $R = \mathbf{Q}[X]$;
- (d) $2i - 9$ con $R = \mathbf{Z}[i]$.

7. Sia p un primo. Sia $g_0(X) = X - 1$. Per $n \geq 1$ definiamo $g_n(X)$ induttivamente tramite la formula $\prod_{k=0}^n g_k(X) = X^{p^n} - 1$.

- (a) Calcolare il polinomio $g_1(X)$.
- (b) Dimostrare che per $n \geq 1$ si ha che $g_n(X) = g_1(X^{p^{n-1}})$.
- (b) Dimostrare che per ogni $n \geq 0$ il polinomio $g_n(X)$ è irriducibile in $\mathbf{Q}[X]$.

8. Scrivere i gruppi $\mathbf{Z}_{120}^*$ e $\mathbf{Z}_{10!}^*$ come prodotto di gruppi del tipo $\mathbf{Z}_n$.

9. Sia R un anello commutativo con 1. Un elemento $x \in R$ si dice *nilpotente* se $x^n = 0$ per qualche $n \geq 0$.

- (a) Dimostrare che gli elementi nilpotenti di R formano un ideale N di R .
- (b) Dimostrare che $N \subset \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ dove $\mathfrak{p}$ varia fra gli ideali primi di R . Nel prossimo esercizio dimostriamo l'inclusione opposta.

10. Siano R e N come nell'esercizio 9 e sia $x \in R - N$. Sia Ω l'insieme degli ideali I di R che hanno la proprietà che $x^n \notin I$ per ogni $n \geq 1$. Ordiniamo Ω tramite l'inclusione.

- (a) Dimostrare che $\Omega \neq \emptyset$.
- (b) Dimostrare che ogni catena in Ω ha un maggiorante in Ω .
- (c) Per il Lemma di Zorn esiste un elemento massimale $M \in \Omega$. Dimostrare che M è un ideale primo di R .
- (d) Dimostrare che si ha che $\bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} \subset N$.