ALGEBRA 1 - 02/12/2020

Def. 1: PRODOTTI DIRETTI DI GRUPPOIDI

Dati n gruppoidi $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, con operazione $*_i$ in ciascun Γ_i, si dice prodotto diretto di $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ il gruppoide $(\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n ; *)$ dove

$$(\gamma_1', \dots, \gamma_n') * (\gamma_1'', \dots, \gamma_n'') := (\gamma_1' *_1 \gamma_1'', \dots, \gamma_n' *_n \gamma_n'')$$

Esercizio 2: (a) $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$, la funzione

$$\pi_i : \mathop{\times}_{s=1}^{n} \Gamma_s \twoheadrightarrow \Gamma_i, \quad (\gamma_s)_{s=1}^{n} \longmapsto \gamma_i,$$

è un epimorfismo

(b) se Γ_i è semigruppo / monoide / gruppo / commutativo $\forall i$, $\Rightarrow$ $\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n} \Gamma_i ; *\right)$ è semigruppo / monoide / gruppo / commutativo

$\boxed{\text{Def. 3}}$: Sia $(\Gamma; *)$ un gruppoide.

(a) Una relazione ρ in Γ si dice compatibile (con l'operazione $*$ di Γ) se $\forall\, \gamma_1', \gamma_2', \gamma_1'', \gamma_2'' \in \Gamma$

$$(\gamma_1' \rho \gamma_1'') \wedge (\gamma_2' \rho \gamma_2'') \Rightarrow (\gamma_1' * \gamma_2') \,\rho\, (\gamma_1'' * \gamma_2'')$$

(b) Una equivalenza compatibile in Γ si dice congruenza.

Esempi: $\boxed{1}$ $\leq$ in $\mathbb{Z}$ è compatibile con $+$ ma NON con $\cdot$;

$\boxed{2}$ $\leq$ in $\mathbb{N}$ è compatibile con $+$ e con $\cdot$;

$\boxed{3}$ per $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ o $\mathbb{A} = \mathbb{N}$, la relazione di "divisibilità" $\delta_{\mathbb{A}}$ è compatibile con $\cdot$ ma NON con $+$;

$\boxed{4}$ $\subseteq$ in $\mathcal{P}(E)$ è compatibile con $\cap$ e con $\cup$;

$\boxed{5}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\equiv_n$ in $\mathbb{Z}$ è compatibile con $+$ e con $\cdot$.

TEOREMA 4: $\forall$ morfismo di gruppoidi $(\Gamma;*) \xrightarrow{\varphi} (K;\bullet)$ la relazione ρ_φ in Γ ad esso associata – data da $\gamma' \rho_\varphi \gamma'' \overset{\Delta}{\iff} \varphi(\gamma') = \varphi(\gamma'')$ – è una congruenza.

dim.: Devo dimostrare che ρ_φ è compatibile con $*$.

$$\forall \gamma_1', \gamma_2', \gamma_1'', \gamma_2'' \in \Gamma : (\gamma_1' \rho \gamma_1'') \wedge (\gamma_2' \rho \gamma_2''), \implies$$

$$\implies \varphi(\gamma_1') = \varphi(\gamma_1'') \wedge \varphi(\gamma_2') = \varphi(\gamma_2'')$$

$$\varphi(\gamma_1') \bullet \varphi(\gamma_2') \overset{\text{ok}}{=} \varphi(\gamma_1'') \bullet \varphi(\gamma_2'')$$

$$(\gamma_1' * \gamma_2') \underset{\text{ok}}{\cancel{\overset{?}{\rho_\varphi}}} (\gamma_1'' * \gamma_2'') \iff \varphi(\gamma_1' * \gamma_2') \underset{\text{ok}}{\cancel{\overset{?}{=}}} \varphi(\gamma_1'' * \gamma_2''). \square$$

TEOREMA 5: $\boxed{Hp:}$ χ è una congruenza nel gruppoide $(\Gamma; *)$

$\boxed{Th:}$ (a) L'insieme quoziente Γ/χ è un gruppoide con operazione $\circledast$ data da

$$\boxed{[\gamma_1]_\chi \circledast [\gamma_2]_\chi := [\gamma_1 * \gamma_2]_\chi} \qquad \forall\, [\gamma_1]_\chi, [\gamma_2]_\chi \in \Gamma/\chi$$

(b) La proiezione canonica è un epimorfismo.

$$\pi_\chi : \Gamma \longrightarrow \Gamma/\chi$$
$$\gamma \longmapsto \pi_\chi(\gamma) := [\gamma]_\chi$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Def. 6:}}$ $(\Gamma/\chi ; \circledast)$ si dice (gruppoide) quoziente di Γ per χ

Dim.: (a) Devo provare che $\circledast$ è ben definita

cioè che $(\gamma_1' \,\chi\, \gamma_1'') \wedge (\gamma_2' \,\chi\, \gamma_2'') \overset{?}{\Longrightarrow} (\gamma_1' * \gamma_2') \,\chi\, (\gamma_1'' * \gamma_2'')$

$\forall\, \gamma_1', \gamma_1'', \gamma_2', \gamma_2'' \in \Gamma$

VERO per Hp ok

(b) Devo verificare che $\forall\, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ si abbia

$$\pi_\chi(\gamma_1 * \gamma_2) = \pi_\chi(\gamma_1) \circledast \pi_\chi(\gamma_2)$$

ORA

Th

$$\begin{array}{ccc} \pi_\chi(\gamma_1 * \gamma_2) & \overset{?}{=} & \pi_\chi(\gamma_1) \circledast \pi_\chi(\gamma_2) \\ \| & \text{x def. di } \pi_\chi & \| \\ [\gamma_1 * \gamma_2]_\chi & = & [\gamma_1]_\chi \circledast [\gamma_2]_\chi \end{array}$$

x def. di $\circledast$

ok

. $\square$

COROLLARIO 7: $\boxed{Hp}$: χ è una congruenza nel gruppoide $(\Gamma; *)$

$\boxed{Th}$: Se $(\Gamma; *)$ è semigruppo, risp. monoide, risp. gruppo, risp. commutativo, allora $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\left(\Gamma/\chi; \circledast\right)$ è semigruppo, risp. monoide, risp. gruppo, risp. commutativo

Dim.: Siccome $\pi_\chi : \Gamma \longrightarrow \Gamma/\chi$ è un morfismo,

$\Rightarrow$ $\pi_\chi(\Gamma)$ è semigruppo, risp. monoide, risp. gruppo, risp. commutativo

(per proprietà generali di ogni morfismo!)

MA π_χ è suriettiva $\Rightarrow$ $\pi_\chi(\Gamma) = \Gamma/\chi$

QUINDI $\Rightarrow$ OK $\square$

TEOREMA FONDAMENTALE DI OMOMORFISMO

$\boxed{Hp}$: $(\Gamma; *) \xrightarrow{\varphi} (K; \cdot)$ è omomorfismo di gruppoidi.

$\boxed{Th}$: Nel diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_\varphi"'] & K \\ \Gamma/\rho_\varphi \arrow[r, "\cong", "\varphi_*"'] & Im(\varphi) \arrow[u, "j_\varphi"'] \end{tikzcd}$$

$$\left(\begin{array}{c} [\gamma]_{\rho_\varphi} \overset{\varphi_*}{\longmapsto} \varphi(\gamma) \\ \varphi(\gamma) \underset{j_\varphi}{\longmapsto} \varphi(\gamma) \end{array} \right)$$

dato dal Teorema Fondamentale delle Applicazioni, tutti i vertici sono gruppoidi e tutte le funzioni sono morfismi — in particolare, φ_* è un isomorfismo, così che $\Gamma/\rho_\varphi \cong Im(\varphi)$

Inoltre, se Γ è semigruppo/monoide/gruppo, allora anche Γ/χ e $Im(\varphi)$ sono semigruppi/monoidi/gruppi.

Dim.: Devo dimostrare soltanto che φ_* è morfismo.

ORA $\boxed{\varphi_*([\gamma_1]_{e_\varphi} \circledast [\gamma_2]_{e_\varphi})} :=$ * def. di φ_*

$$:= \varphi_*([\gamma_1 * \gamma_2]_{e_\varphi}) := \varphi(\gamma_1 * \gamma_2) =$$

$$= \varphi(\gamma_1) \bullet \varphi(\gamma_2) = \boxed{\varphi_*([\gamma_1]_{e_\varphi}) \bullet \varphi_*([\gamma_2]_{e_\varphi})}$$

$\boxed{\varphi_* \text{ è morfismo}}$, q.e.d. $\square$

PROBLEMA: dato un monoide M, posso "migliorarlo" fino a ottenere un gruppo $G(M)$? $\exists$ due idee:

– (1): seleziono gli elementi che l'inverso ce l'hanno già

cioè $M \rightsquigarrow U(M)$ OK

– (2): "aggiungo" l'inverso degli elementi che non lo hanno

... ci sono problemi!!!

N.B.: abbiamo già fatto (2) con $M := (\mathbb{N}; +)$

$\rightsquigarrow$ abbiamo costruito $G(M) = (\mathbb{Z}; +)$

$\boxed{\text{Def. 8}}$: Un gruppoide $(\Gamma; *)$ si dice cancellativo se

$$\gamma_1 * \gamma = \gamma_2 * \gamma \implies \gamma_1 = \gamma_2$$
&
$$\gamma * \gamma_1 = \gamma * \gamma_2 \implies \gamma_1 = \gamma_2 \qquad \forall\, \gamma_1, \gamma_2, \gamma \in \Gamma$$

ESEMPI & CONTROESEMPI 9:

$\boxed{\text{SÌ}}$ (cancellativi): $(\mathbb{N};+)$, $(\mathbb{N}_+;\cdot)$, $(\mathcal{P}(E);\Delta)$, $(\mathcal{S}(E);\circ)$

$\boxed{\text{NO}}$ (non cancellativi): $(\mathbb{N};\cdot)$, $(\mathbb{N};\uparrow_{max})$, $(\mathbb{N};\downarrow_{min})$,

$(\mathbb{N};\vee_{mcm})$, $(\mathbb{N};\wedge_{MCD})$, $(\mathcal{P}(E);\cup)$, $(\mathcal{P}(E);\cap)$, $(\mathcal{P}(E);\setminus)$, $(E^E;\circ)$

LEMMA 10: Ogni gruppo è cancellativo.

dim.: $\forall G$ gruppo, $\forall g, g_1, g_2 \in G$ tali che

$$g_1 \cdot g = g_2 \cdot g \Rightarrow (g_1 g)\cdot g^{-1} = (g_2 \cdot g)\cdot g^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_1 \cdot (g\, g^{-1}) = g_2 (g\, g^{-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_1 \cdot e_G = g_2 \cdot e_G \Rightarrow \boxed{g_1 = g_2}\ \text{ok}$$

elemento neutro di G

Analogamente,

$$g \cdot g_1 = g \cdot g_2 \Rightarrow \boxed{g_1 = g_2}\ \text{ok}$$

(moltiplicando a sinistra per g^{-1})

TEOREMA 10

Hp: $(S;*)$ è semigruppo commutativo cancellativo

Th: $\exists$ gruppo commutativo $(G(S);\circledast)$ e

$\exists$ monomorfismo $j: S \hookrightarrow G(S)$ tali che

$\forall\, g \in G(S)$, $\exists\, s_+, s_- \in S$: $g = j(s_+) \circledast j(s_-)^{-1}$ in S

N.B.: scriveremo allora "$g = s_+ / s_-$"

Dim.: **IDEA:** si ripete la costruzione $(\mathbb{N};+) \Rightarrow (\mathbb{Z};+)$

$\boxed{1}$ $S \times S$ è gruppoide per l'operazione (vedasi Def. 1)

$$(s'_+, s'_-) \otimes (s''_+, s''_-) := (s'_+ * s''_+,\ s'_- * s''_-)$$

$\Rightarrow$ $(S \times S;\otimes)$ è semigruppo commutativo (per Esercizio 2)

$\boxed{2}$ $\exists$ in $S \times S$ la relazione η data da

$$(s'_+, s'_-)\ \eta\ (s''_+, s''_-) \overset{\Delta}{\iff} s'_+ * s''_- = s''_+ * s'_-$$

[IDEA: $(s'_+, s'_-)\ \eta\ (s''_+, s''_-) \iff$ " $s'_+ / s'_- = s''_+ / s''_-$ "]

$\boxed{3}$ η è una equivalenza in $S \times S$

$\boxed{\text{N.B.:}}$ qui serve la cancellatività, per la (T) !

$\rightsquigarrow$ NOTAZIONE: $s_+ / s_- := [(s_+, s_-)]_\eta \in (S \times S)/\eta$

$\boxed{4}$ η è compatibile con l'operazione $\otimes$ in $S \times S$

$\langle\langle$ calcoli... $\rangle\rangle$

$\boxed{5}$ $\left[\boxed{1} + \boxed{3} + \boxed{4} + \text{TEOREMA } 5 \right] \Longrightarrow \exists$ gruppoide quoziente

$$G(S) := \left({}^{S\times S}/_{\eta} \, ; \circledast \right) \quad \text{con} \quad {}^{s_+}/_{s_-} \circledast {}^{S_+}/_{S_-} := \frac{(s_+ * S_+)}{(s_- * S_-)}$$

$\boxed{6}$ $(G(S); \circledast)$ è semigruppo commutativo (per COROLLARIO 7), ha elemento neutro ${}^{s}/_{s}$ $(s \in S)$

e $\forall\, g := {}^{s_+}/_{s_-} \in G(S)$, $\exists\, g^{-1} = {}^{s_-}/_{s_+} \in G(S)$

$\rightsquigarrow$ $(G(S); \circledast)$ è gruppo commutativo

$\boxed{7}$ $\exists$ la funzione $j : S \longrightarrow G(S)$

$$s \longmapsto {}^{s^2}/_{s} \quad (\forall\, s \in S)$$

$$\parallel \quad {}^{s * s'}/_{s'}$$

che è iniettiva ed è morfismo

$\boxed{8}$ $\forall\, g \in G(S) := {(S\times S)}/{\eta}$, $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists\, (s_+, s_-) \in S\times S \;:\; g = [(s_+, s_-)]_\eta =: \boxed{{s_+}/{s_-}}$

ma $\quad g = {s_+}/{s_-} = {(s_+ * s)}/{s} \circledast {s}/{(s_- * s)} \quad (\forall s \in S) =$

$= j(s_+) \circledast j(s_-)^{-1} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ g si scrive nella forma

$$g = j(s_+) \circledast j(s)^{-1} \qquad \text{q.e.d.} \quad \square$$

Esempi/Applicazioni: $(S;*) := (\mathbb{N};+) \Rightarrow G(S) = (\mathbb{Z};+)$

$(S;*) := (\mathbb{N}_+;\cdot) \Rightarrow G(S) = (\mathbb{Q}_+;\cdot)$, $\quad (S;*) := (\mathbb{Z}^*;\cdot) \Rightarrow G(S) = (\mathbb{Q}^*;\cdot)$