ALGEBRA 1 - 16/12/2020

MEMO **Def. 10:** Un sottogruppo N di G si dice normale (in G) se $gN = Ng$ $\forall g \in G$. Si scrive allora $N \trianglelefteq G$.

Esercizio 11: $\forall N \leq G$, le seguenti proprietà sono equivalenti:

(1) $gN = Ng$ $\forall g \in G$, cioè $N \trianglelefteq G$;

(2) $gNg^{-1} = N$ $\forall g \in G$;

(3) $gNg^{-1} \subseteq N$ $\forall g \in G$;

(4) $gN \subseteq Ng$ $\forall g \in G$;

(5) $gN \supseteq Ng$ $\forall g \in G$;

(6) $G/N = N\backslash G$;

(7) $\rho_s^N = \rho_d^N$.

TEOREMA 12: $\boxed{Hp:}$ G gruppo, $\mathcal{C}_G := \{\text{congruenze in } G\}$

$$\mathcal{N}_G := \{N \mid N \trianglelefteq G\} = \{\text{sottogruppi normali di } G\}$$

$\boxed{Th:}$ $\exists$ biiezioni inverse l'una dell'altra

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_G &\xrightarrow{\Phi} \mathcal{N}_G \\ \varkappa &\longmapsto N_\varkappa := [1_G]_\varkappa \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathcal{N}_G &\xrightarrow{\Psi} \mathcal{C}_G \\ N &\longmapsto \rho_d^N = \rho_s^N = \varkappa_N \end{aligned}$$

——< FINE MEMO >——

$\boxed{\text{Def. 1:}}$ $\forall$ morfismo di gruppi $\varphi : G \longrightarrow K$, definiamo

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \text{IMMAGINE di } \varphi := \varphi(G) = \{k \in K \mid \exists g \in G : \varphi(g) = k\} \quad (\subseteq K)$$

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \text{NUCLEO di } \varphi := \varphi^{-1}(1_K) = \{g \in G \mid \varphi(g) = 1_K\} \quad (\subseteq G)$$

PROPOSIZIONE 2:

$\boxed{\text{Hp:}}$ $\varphi : G \longrightarrow K$ è morfismo di gruppi

$\boxed{\text{Th:}}$ (a) $\text{Im}(\varphi) \leq K$

(b) $\text{Ker}(\varphi) \trianglelefteq G$

(c) $\varphi^{-1}(\varphi(g)) = g \cdot \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi) \cdot g \,, \quad \forall g \in G$

Dim.:

(a) GIA' VISTO! ...

MEMO: $\boxed{1}$ $\text{Im}(\varphi) \neq \emptyset$ perché $\text{Im}(\varphi) \ni 1_K$

INFATTI $1_K = \varphi(1_G)$ perché $1_G \cdot 1_G = 1_G \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(1_G) \cdot \varphi(1_G) = \varphi(1_G \cdot 1_G) = \varphi(1_G) \Rightarrow \varphi(1_G) \cdot \varphi(1_G) = \varphi(1_G) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (moltiplicando per $\varphi(1_G)^{-1}$) $\varphi(1_G) = 1_K$

$\boxed{2}$ $\forall\ \varphi(g_1), \varphi(g_2) \in Im(\varphi)$ si ha

$$\varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2)^{-1} = \varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2^{-1}) = \varphi(g_1 g_2^{-1}) \in Im(\varphi)$$

QUINDI $\boxed{1} + \boxed{2} \Rightarrow Im(\varphi) \leq K$, q.e.d.

(b) 1° METODO: definizioni & risultati precedenti danno

$$Ker(\varphi) := \varphi^{-1}(1_K) = \varphi^{-1}(\varphi(1_G)) = [1_G]_{\rho_\varphi} =: N_{\rho_\varphi} \trianglelefteq G$$

φ morfismo $\Rightarrow$ ρ_φ congruenza $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Teorema 12}}$

2° METODO: $\boxed{1}$ $Ker(\varphi) := \varphi^{-1}(1_K) = 1_G \Rightarrow Ker(\varphi) \neq \emptyset$

$\boxed{2}$ $\forall\ k_1, k_2 \in Ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(k_1) = 1_K = \varphi(k_2)$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(k_1 \cdot k_2^{-1}) = \varphi(k_1)\cdot\varphi(k_2)^{-1} = 1_K \cdot 1_K^{-1} = 1_K \Rightarrow k_1 \cdot k_2^{-1} \in Ker(\varphi)$$

QUINDI $\boxed{1} + \boxed{2} \Rightarrow \operatorname{Ker}(\varphi) \leq G$

INOLTRE $\forall g \in G$ si ha

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(g \cdot \operatorname{Ker}(\varphi) \cdot g^{-1}) = \varphi(g) \cdot \varphi(\operatorname{Ker}(\varphi)) \cdot \varphi(g)^{-1} = \\ &= \varphi(g)\{1_K\}\varphi(g)^{-1} = \{\varphi(g) \cdot \varphi(g)^{-1}\} = \{1_K\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(g \cdot \operatorname{Ker}(\varphi) \cdot g^{-1}) = \{1_K\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g \cdot \operatorname{Ker}(\varphi) \cdot g^{-1} \subseteq \varphi^{-1}(1_K) =: \operatorname{Ker}(\varphi) \Rightarrow$$

$$\left.\Rightarrow \quad \begin{aligned} &g \cdot \operatorname{Ker}(\varphi) \cdot g^{-1} \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi) \\ &\forall g \in G \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \operatorname{Ker}(\varphi) \trianglelefteq G$$

Esercizio 11

(c) 1° METODO: definizioni & risultati precedenti danno

$$\forall g \in G, \quad \varphi^{-1}(\varphi(g)) = [g]_{\rho_\varphi} = g\, N_{\rho_\varphi} = g \cdot \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi) \cdot g$$

con

$$N_{\rho_\varphi} := [1_G]_{\rho_\varphi} = \varphi^{-1}(\varphi(1_G)) = \varphi^{-1}(1_K) =: \mathrm{Ker}(\varphi)$$

perché $\mathrm{Ker}(\varphi) \trianglelefteq G$

2° METODO: $\varphi^{-1}(\varphi(g)) \supseteq g \cdot \mathrm{Ker}(\varphi)$, perché

$$\varphi(g \cdot \mathrm{Ker}(\varphi)) = \varphi(g) \cdot \varphi(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \varphi(g) \cdot \varphi(\varphi^{-1}(1_K)) =$$

$$= \varphi(g) \cdot 1_K = \varphi(g) \implies g \cdot \mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(g))$$

$\varphi^{-1}(\varphi(g)) \subseteq g \cdot \mathrm{Ker}(\varphi)$, perché $\forall \gamma \in \varphi^{-1}(\varphi(g))$ si ha

$$\varphi(g^{-1}\gamma) = \varphi(g)^{-1} \cdot \varphi(\gamma) = \varphi(g)^{-1} \cdot \varphi(g) = 1_K \implies k := g^{-1}\gamma \in \underset{\mathrm{Ker}(\varphi)}{\underset{\shortparallel}{\varphi^{-1}(1_K)}} \implies$$

$$\implies \gamma = g \cdot (g^{-1}\gamma) = g \cdot k \in g \cdot \mathrm{Ker}(\varphi) \quad \underline{\underline{\text{ok}}} \qquad \square$$

$\boxed{\text{DOMANDA:}}$ $\forall$ morfismo $\varphi : G \longrightarrow K$, che succede se

(I) $\mathrm{Im}(\varphi)$ è banale, cioè $\mathrm{Im}(\varphi) \in \{K, \{1_K\}\}$?

(K) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ è banale, cioè $\mathrm{Ker}(\varphi) \in \{G, \{1_G\}\}$?

PROPOSIZIONE 3: $\boxed{\text{Hp:}}$ $\varphi : G \longrightarrow K$ è morfismo di gruppi

$\boxed{\text{Th:}}$ (a) $\mathrm{Im}(\varphi) = \{1_K\}$ $\Longleftrightarrow$ φ è banale (= costante)

$\Updownarrow$ (cioè $\varphi(g) = 1_K$, $\forall g \in G$)

$\mathrm{Ker}(\varphi) = G$ $\Longleftrightarrow$ φ è banale

(b) $\mathrm{Im}(\varphi) = K \iff \varphi$ è suriettivo

(c) $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\} \iff \varphi$ è iniettivo

Dim.: (a) & (b) → OVVI, per definizione !!

(c)

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\} \iff g \cdot \mathrm{Ker}(\varphi) = g \cdot \{1_G\} = \{g\} \quad \forall g \in G \iff$$

PROPOSIZIONE 2 (c)

$$\iff \varphi^{-1}(\varphi(g)) = \{g\}, \quad \forall g \in G \iff$$

$$\iff \left|\varphi^{-1}(\varphi(g))\right| = 1, \quad \forall g \in G \iff \varphi \text{ è iniettivo} \qquad \square$$

TEOREMA 4: $\boxed{\text{Hp:}}$ G è un gruppo

$\boxed{\text{Th:}}$ (a) Le congruenze in G sono tutte e sole le equivalenze in G associate a morfismi di gruppi che abbiano G per dominio, CIOÈ

(a.1) $\forall$ morfismo di gruppi $\varphi : G \longrightarrow K$, la relazione ρ_φ è una congruenza in G

(a.2) $\forall$ congruenza κ in G, $\exists$ un morfismo di gruppi $\varphi : G \longrightarrow K$ tale che $\rho_\varphi = \kappa$

(b) I sottogruppi normali di G sono tutti e soli i nuclei di morfismi di gruppi che abbiano G per dominio, CIOÈ

(b.1) $\forall$ morfismo di gruppi $\varphi : G \longrightarrow K$, si ha $\operatorname{Ker}(\varphi) \trianglelefteq G$

(b.2) $\forall$ sottogruppo normale $N \trianglelefteq G$, $\exists$ un morfismo di gruppi $\varphi : G \longrightarrow K$ tale che $\operatorname{Ker}(\varphi) = N$.

Dim.: Costruzioni già viste danno:

(a.1) $\forall\, \varphi : G \longrightarrow K \Rightarrow \rho_\varphi$ è congruenza, q.e.d.

(a.2) $\forall$ congruenza $\varkappa$ in $G \Rightarrow \exists$ gruppo quoziente $G/_\varkappa$ & $\exists$ morfismo

$$\pi_\varkappa : G \twoheadrightarrow G/_\varkappa \qquad \text{per cui} \quad \rho_{\pi_\varkappa} = \varkappa$$
$$g \longmapsto [g]_\varkappa$$

PROPOSIZIONE 2 (b)

(b.1) $\forall\, \varphi : G \longrightarrow K \Rightarrow Ker(\varphi) \trianglelefteq G$, q.e.d.

(b.2) $\forall\, N \trianglelefteq G \Rightarrow \exists$ gruppo quoziente $G/_N$ & $\exists$ morfismo $\pi_N : G \twoheadrightarrow G/_N$ $(g \mapsto gN)$ per il quale si ha $Ker(\pi_N) = N$, q.e.d.

(perché $g \in Ker(\pi_N) \iff gN = 1_G \cdot N = N \iff g \in N$) $\square$

Teorema Fondamentale di Omomorfismo per Gruppi

$\forall$ morfismo di gruppi $\varphi : G \longrightarrow K$, il diagramma commutativo di funzioni tra insiemi

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "\pi_\varphi"'] & & K \\
G/\rho_\varphi \arrow[rr, hook, two heads, "\cong", "\varphi_*"'] & & \mathrm{Im}(\varphi) \arrow[u, hook, "j_\varphi"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
g \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & \varphi(g) \\
{[g]_{\rho_\varphi} = g \cdot \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi) \cdot g} \arrow[rr, mapsto] & & {\varphi_*([g]_{\rho_\varphi}) = \varphi(g)} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

$$\mathrm{Ker}(\varphi)\backslash G = G/\rho_\varphi = G/\mathrm{Ker}(\varphi)$$

tutti gli insiemi sono gruppi e tutte le funzioni sono morfismi. In particolare, π_φ è epimorfismo, j_φ è monomorfismo, e φ_* è isomorfismo, così $G/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$.

PROPOSIZIONE 5:

$\boxed{\text{Hp:}}$ $\varphi : G \longrightarrow K$ morfismo di gruppi.

$\boxed{\text{Th:}}$ (a) $H \leq G \Rightarrow \varphi(H) \leq \operatorname{Im}(\varphi) \leq K$

(b) $Q \leq K \Rightarrow G \geq \varphi^{-1}(Q) \geq \operatorname{Ker}(\varphi)$

(c) $H \leq G \Rightarrow \varphi^{-1}(\varphi(H)) = H \cdot \operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi) \cdot H$

(d) $Q \leq K \Rightarrow \varphi(\varphi^{-1}(Q)) = Q \cap \operatorname{Im}(\varphi)$

(e) $N \trianglelefteq G \Rightarrow \varphi(N) \trianglelefteq \operatorname{Im}(\varphi)$

(f) $T \trianglelefteq K \Rightarrow \varphi^{-1}(T) \trianglelefteq G$

(g) $T \trianglelefteq \operatorname{Im}(\varphi) \Rightarrow \varphi^{-1}(T) \trianglelefteq G$

Dim.: $H \leq G$

(a) $\varphi(H) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$ OVVIO

Poi $\varphi(H) \leq K$, e quindi $\Rightarrow$ $\varphi(H) \leq \mathrm{Im}(\varphi)$, perché

$H \leq G \Rightarrow 1_G \in H \Rightarrow 1_K = \varphi(1_G) \in \varphi(H) \Rightarrow 1_K \in \varphi(H)$

$\forall\, \varphi(h_1), \varphi(h_2) \in \varphi(H) \Rightarrow \varphi(h_1)\cdot\varphi(h_2)^{-1} = \varphi(h_1\cdot h_2^{-1}) \in \varphi(H)$

$h_1, h_2 \in H,\ H \leq G \Rightarrow h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$

(b) $Q \leq K \Rightarrow Q \ni 1_K \Rightarrow \varphi^{-1}(Q) \supseteq \varphi^{-1}(1_K) =: \mathrm{Ker}(\varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi^{-1}(Q) \supseteq \mathrm{Ker}(\varphi)\ (\neq \emptyset) \Rightarrow \varphi^{-1}(Q) \neq \emptyset$

& $\forall\, g_1, g_2 \in \varphi^{-1}(Q), \Rightarrow g_1 \cdot g_2^{-1} \in \varphi^{-1}(Q)$ OK

$\varphi(g_1), \varphi(g_2) \in Q \leq K \Rightarrow \varphi(g_1\cdot g_2^{-1}) = \varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2)^{-1} \in Q$

(c) $\mathrm{Ker}(\varphi) \trianglelefteq G \implies g \cdot \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi) \cdot g, \ \forall g \in G \implies$

$$\implies H \cdot \mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcup_{h \in H} h \cdot \mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcup_{h \in H} \mathrm{Ker}(\varphi) \cdot h = \mathrm{Ker}(\varphi) \cdot H$$

Inoltre

$$\varphi(H \cdot \mathrm{Ker}(\varphi)) = \varphi(H) \cdot \varphi(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \varphi(H) \cdot 1_K = \varphi(H) \implies$$

$$\implies H \cdot \mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(H))$$

& $g \in \varphi^{-1}(\varphi(H)) \implies \varphi(g) \in \varphi(H) \implies \exists\, h \in H : \varphi(g) = \varphi(h) \implies$

$\implies \exists\, h \in H : g \, \rho_\varphi \, h \implies \exists\, h \in H : g \in [h]_{\rho_\varphi} = h \cdot \mathrm{Ker}(\varphi) \implies$

$\implies g \in H \cdot \mathrm{Ker}(\varphi)$ and $\varphi^{-1}(\varphi(H)) \subseteq H \cdot \mathrm{Ker}(\varphi)$

(d) $Q \leq K \implies \varphi(\varphi^{-1}(Q)) \subseteq Q \cap \mathrm{Im}(\varphi)$ OVVIO

& $q \in Q \cap \mathrm{Im}(\varphi) \implies \exists\, g \in G : \varphi(g) = q \in Q \implies g \in \varphi^{-1}(\varphi(Q))$ OK

(e)

$$N \trianglelefteq G \Rightarrow \begin{cases} N \leq G \Rightarrow \varphi(N) \leq \operatorname{Im}(\varphi) \quad \text{per (a)} \\ g \cdot N \cdot g^{-1} = N, \ \forall g \in G \end{cases}$$

$$\underline{\varphi(g)\cdot\varphi(N)\cdot\varphi(g)^{-1}} = \varphi(gNg^{-1}) = \varphi(N) \quad \Rightarrow \quad \varphi(N) \trianglelefteq \operatorname{Im}(\varphi)$$

(f) + (g):

$$\left.\begin{array}{l} T \trianglelefteq K \\ T \trianglelefteq \operatorname{Im}(\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} T \leq K \Rightarrow \varphi^{-1}(T) \leq G \quad \text{per (b)} \\ \varphi(g)\cdot T\cdot\varphi(g)^{-1} \subseteq T, \ \forall \varphi(g) \in \operatorname{Im}(\varphi) \\ k\cdot T\cdot k^{-1} \subseteq T, \ \forall k \in K \end{cases}$$

$$\varphi^{-1}(T) \trianglelefteq G$$

$$\varphi(g\cdot\varphi^{-1}(T)\cdot g^{-1}) = \varphi(g)\cdot\varphi(\varphi^{-1}(T))\cdot\varphi(g)^{-1} \subseteq$$

$$\subseteq \varphi(g)\cdot T\cdot\varphi(g)^{-1} \subseteq T \Rightarrow g\cdot\varphi^{-1}(T)\cdot g^{-1} \subseteq \varphi^{-1}(T) \quad \square$$

COROLLARIO 6:

$\boxed{\text{Hp:}}$ $\varphi : G \longrightarrow K$ è morfismo di gruppi

$\mathcal{S}_G := \{ H \mid H \leq G \}$, $\quad \mathcal{S}_G^{\varphi} := \{ H \in \mathcal{S}_G \mid H \supseteq \mathrm{Ker}(\varphi) \}$

$\mathcal{S}_K := \{ Q \mid Q \leq K \}$, $\quad \mathcal{S}_{K,\varphi} := \{ Q \in \mathcal{S}_K \mid Q \subseteq \mathrm{Im}(\varphi) \}$

$\mathcal{N}_G := \{ N \mid N \trianglelefteq G \}$, $\quad \mathcal{N}_G^{\varphi} := \{ N \in \mathcal{N}_G \mid N \supseteq \mathrm{Ker}(\varphi) \}$

$$\mathcal{N}_{K,\varphi} := \{ T \mid T \trianglelefteq \mathrm{Im}(\varphi) \}$$

$\boxed{\text{Th:}}$ (a) $\exists$ ben definite funzioni

$\mathcal{S}_G \xrightarrow{\sigma_\varphi} \mathcal{S}_K \quad (H \longmapsto \varphi(H))$ t.c. $\mathrm{Im}(\sigma_\varphi) = \mathcal{S}_{K,\varphi}$

$\mathcal{S}_K \xrightarrow{\tau_\varphi} \mathcal{S}_G \quad (Q \longmapsto \varphi^{-1}(Q))$ t.c. $\mathrm{Im}(\tau_\varphi) = \mathcal{S}_G^{\varphi}$

(b) $\exists$ ben definite funzioni

$\mathcal{N}_G \xrightarrow{\nu_\varphi} \mathcal{N}_{K,\varphi}$ $(N \longmapsto \varphi(N))$ t.c. $\operatorname{Im}(\nu_\varphi) = \mathcal{N}_{K,\varphi}$

$\mathcal{N}_{K,\varphi} \xrightarrow{\mu_\varphi} \mathcal{N}_G$ $(Q \longmapsto \varphi^{-1}(Q))$ t.c. $\operatorname{Im}(\mu_\varphi) = \mathcal{N}_G^\varphi$

(c) Le restrizioni di σ_φ e τ_φ danno biiezioni

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_G^\varphi \arrow[r, bend left, "\sigma'_\varphi"] & \mathcal{S}_{K,\varphi} \arrow[l, bend left, "\tau'_\varphi"] \end{tikzcd}$$

inverse l'una dell'altra

(d) Le restrizioni di ν_φ e μ_φ danno biiezioni

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N}_G^\varphi \arrow[r, bend left, "\nu'_\varphi"] & \mathcal{N}_{K,\varphi} \arrow[l, bend left, "\mu'_\varphi"] \end{tikzcd}$$

inverse l'una dell'altra

Dim.: È tutto una riformulazione della PROPOSIZIONE 5.

In particolare, (c) – e quindi (d) – segue da questo:

$$\forall\, H \in \mathcal{S}_G \Rightarrow (\zeta_\varphi \circ \sigma_\varphi)(H) = \varphi^{-1}(\varphi(H)) = H \cdot \mathrm{Ker}(\varphi)$$

$$\& \quad H \geq \mathrm{Ker}(\varphi) \iff H \cdot \mathrm{Ker}(\varphi) = H$$

$$\Updownarrow$$

$$H \in \mathcal{S}_G^{\varphi} \qquad \overset{id(H)}{\overset{\|}{(\zeta_\varphi \circ \sigma_\varphi)(H) = H}} \iff H \in \mathcal{S}_G^{\varphi}$$

ANALOGAMENTE

$$\forall\, Q \in \mathcal{S}_K \Rightarrow (\sigma_\varphi \circ \zeta_\varphi)(Q) = \varphi(\varphi^{-1}(Q)) = Q \cap \mathrm{Im}(\varphi)$$

$$Q \leq \mathrm{Im}(\varphi) \iff Q = Q \cap \mathrm{Im}(\varphi)$$

$$\Updownarrow$$

$$Q \in \mathcal{S}_{K,\varphi} \qquad \underset{id(Q)}{\underset{\|}{(\sigma_\varphi \circ \zeta_\varphi)(Q) = Q}} \iff Q \in \mathcal{S}_{K,\varphi}$$

COROLLARIO 7:

(a) $\forall$ epimorfismo di gruppi $\varphi : G \twoheadrightarrow K$,

$\exists$ biiezioni $\mathcal{S}_G^\varphi \xrightarrow{\sigma_\varphi} \mathcal{S}_K$ $\big(H \longmapsto \varphi(H)\big)$

e $\mathcal{N}_G^\varphi \xrightarrow{\nu_\varphi} \mathcal{N}_K$ $\big(N \longmapsto \varphi(N)\big)$

con inverse $\mathcal{S}_K \xrightarrow{\zeta_\varphi} \mathcal{S}_G^\varphi$ $\big(Q \longmapsto \varphi^{-1}(Q)\big)$

e $\mathcal{N}_K \xrightarrow{\mu_\varphi} \mathcal{N}_G^\varphi$ $\big(T \longmapsto \varphi^{-1}(T)\big)$

— o —

Applicando quest'ultimo risultato a un φ della forma $\pi_N : G \twoheadrightarrow G/N$ si ottiene

COROLLARIO 8:

$\boxed{\text{Hp:}}$ G è gruppo, $N \trianglelefteq G$

$\pi_N : G \twoheadrightarrow G/N$ $(g \mapsto gN)$ è l'epimorfismo canonico,

$\mathcal{S}_G^N := \{ H \mid N \subseteq H \leq G \}$, $\mathcal{N}_G^N := \{ M \mid N \subseteq M \trianglelefteq G \}$

$\boxed{\text{Th:}}$ (a) $\exists$ biiezioni, inverse l'una dell'altra,

$$\mathcal{S}_G^N \rightleftarrows \mathcal{S}_{G/N}, \qquad \begin{array}{l} H \longmapsto \pi_N(H) \\ \pi_N^{-1}(\overline{H}) \longleftarrow\!\shortmid \overline{H} \end{array}$$

(b) $\exists$ biiezioni, inverse l'una dell'altra,

$$\mathcal{N}_G^N \rightleftarrows \mathcal{N}_{G/N}, \qquad \begin{array}{l} M \longmapsto \pi_N(M) \\ \pi_N^{-1}(\overline{M}) \longleftarrow\!\shortmid \overline{M} \end{array}$$

ESERCIZIO:

[13] — Dato un insieme E, per ogni $A \subseteq E$ consideriamo i sottoinsiemi di $\mathcal{S}(E)$

$$G_A := \{\, \sigma \in \mathcal{S}(E) \,|\, \sigma(A) = A \,\} \quad , \qquad G_{(A)} := \{\, \nu \in \mathcal{S}(A) \,\big|\, \nu(a) = a \,, \ \forall\, a \in A \,\}$$

e anche la relazione $\sim$ in G_A definita da $\sigma' \sim \sigma'' \iff \sigma'\big|_A = \sigma''\big|_A$ (per ogni $\sigma', \sigma'' \in \mathcal{S}(E)$) dove $\sigma\big|_A$ indica la restrizione di $\sigma \in \mathcal{S}(E)$ al sottoinsieme A.

Dimostrare che:

(a) la relazione $\sim$ è un'equivalenza in G_A ;

(b) G_A è sottogruppo di $(\mathcal{S}(E)\,;\circ)$;

(c) la relazione $\sim$ è compatibile con l'operazione "$\circ$" in G_A ;

(d) $G_{(A)}$ è sottogruppo normale di G_A ;

(e) il gruppo quoziente $G_A \big/ G_{(A)}$ è isomorfo al gruppo di permutazioni $(\mathcal{S}(A)\,;\circ)$;

(f) l'applicazione $\mathcal{R}_A : G_A \longrightarrow \mathcal{S}(A)$, $\sigma \mapsto \mathcal{R}_A(\sigma) := \sigma\big|_A$, è un epimorfismo dal gruppo $(G_A\,;\circ)$ al gruppo $(\mathcal{S}(A)\,;\circ)$;

(g) la relazione $\sim$ è l'equivalenza in G_A canonicamente associata all'applicazione $\mathcal{R}_A$;

(h) $\sim\, = \rho_d^{G_{(A)}}$ dove $\rho_d^{G_{(A)}}$ è la relazione destra in G_A canonicamente associata a $G_{(A)}$;

(i) $\sim\, = \rho_s^{G_{(A)}}$ dove $\rho_s^{G_{(A)}}$ è la relazione sinistra in G_A canonicamente associata a $G_{(A)}$.

Sol.: (b) $G_A \leq S(E)$ lo dimostriamo direttamente!

$\boxed{1}$ $G_A \ni id_E$ ok

$\boxed{2}$ $\forall\ \sigma, \tau \in G_A \overset{\cancel{?}}{\Longrightarrow} \sigma\tau^{-1} \in G_A$ ok

$\sigma(A) = A$

$\tau(A) = A$

$\tau^{-1}(\tau(A)) = \boxed{\tau^{-1}(A)}$

$\boxed{A} \Rightarrow \tau^{-1} \in G_A$

$\boxed{(\sigma \circ \tau^{-1})(A)} = \sigma(\tau^{-1}(A)) = \sigma(A) = \boxed{A}$

(f) $\exists$ funzione $R_A : G_A \longrightarrow S(A)$

$$\sigma \longmapsto \sigma|_A =: R_A(\sigma)$$

N.B.: $\sigma|_A$ è iniettiva, $\sigma|_A \in S(A)$

$\sigma|_A : A \longrightarrow E$

MA $\sigma(A) = A \rightsquigarrow \sigma|_A : A \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow A$

INOLTRE

$(\sigma \circ \tau)|_A = \sigma|_A \circ \tau|_A$ cioè R_A è MORFISMO

In aggiunta, $\forall\, \nu \in S(A)$, $\exists\, \sigma_\nu \in S(E)$ definita da

$\sigma_\nu(e) := \begin{cases} \nu(e), & \forall e \in A \\ e, & \forall e \in E \setminus A \end{cases}$ e t.c. $R_A(\sigma_\nu) = \nu \implies$

$\implies \operatorname{Im}(R_A) = S(A)$, cioè R_A è epimorfismo, q.e.d.

ORA, da (f) si può dedurre tutto il resto (o quasi).

Ad esempio, per costruzione si ha $\sim = \rho_{R_A}$, $\Rightarrow$ $\boxed{\text{vale (g)}}$

MA

R_A morfismo $\Rightarrow$ ρ_{R_A} è congruenza $\Rightarrow$ $\boxed{\text{valgono (a) + (c)}}$

INOLTRE

$\mathrm{Ker}(R_A) = G_{(A)}$ per costruzione,

&

R_A morfismo $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(R_A) \trianglelefteq G_A$ $\Rightarrow$ $G_{(A)} \trianglelefteq G_A$

cioè $\boxed{\text{vale (d)}}$

POI il Teorema Fondamentale di Omomorfismo ci dà, a partire da $R_A : G_A \twoheadrightarrow \Sigma(A)$,

che $\exists$ l'isomorfismo $(R_A)_* : G_A / G_{(A)} = G / \mathrm{Ker}(R_A) \xhookrightarrow{\cong} \mathrm{Im}(R_A) = \Sigma(A)$

descritto esplicitamente da $\sigma \circ G_{(A)} \longmapsto \sigma|_A$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{vale (e)}}$