

CALCOLO COMBINATORIO

[L-L] Ch. 5 (86)

Tema: problemi di enumerazione (contare oggetti...)

NOTAZIONE: [1] $\forall \ell \in \mathbb{N}$, poniamo " $\ell :=$ insieme con ℓ elementi" e precisamente ($\ell = 0 \Rightarrow$) $\underline{0} := \emptyset$, $\underline{\ell} := \{1, \dots, \ell\}$ ($\forall \ell \neq 0$)

[2] $\forall$ insieme finito $|E|$, poniamo $|E| :=$ numero di elementi di E .
N.B.: con ciò ha $|m| = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

NOTA: i problemi che considereremo trattano sempre insiemi finiti. Di questi, la sola cosa che conta è non il loro numero di elementi, e non altro.

Bentosto, potremo sempre assumere - e lo faremo - che tali insiemi siano della forma $\underline{n}$, con $n \in \mathbb{N}$.

1. Calcolo di $|u^k|$, $\forall k, n \in \mathbb{N}$:

"Sampling with repetitions"

MEMO: $u^k := \{ \text{funzioni } k \rightarrow u \}$

Soluzione:

- ① $\forall f \in u^k$, f è data da $(f(1), \dots, f(k))$;
 - ② ogni $f(i) \in u$ è scelto liberamente ($\forall i=1, \dots, k$) tra gli elementi di u , che sono $|u| = n$;
 - ③ le k scelte in ② sono indipendenti l'una dall'altra.
- ALLORA ② + ② + ③ $\Rightarrow |u^k| = n^k$ (c'è $|u^k| = |u|^k$)

OPPURE: si fa induzione su k , prendendo $F_n(k) := |u^k|$

Th: $F_n(k) = n^k$ (nota che si serve sempre un "candidato")

BASE: $k=0 \Rightarrow F_n(0) := |\emptyset| = 1 = n^0$,

perché $u^0 = u^\emptyset = \{ f: \emptyset \rightarrow u \} = \{ \emptyset \}$

con $\emptyset$ visto come sottoinsieme di $\emptyset \times u$

$k \Rightarrow k+1$ osservo che $F_n(k+1) = F_n(k) \cdot n \xrightarrow{\text{HPI ind.}} F_n(k+1) = n \cdot n^k = n^{k+1}$ Q.E.D.

(prima vedevo $f(1), \dots, f(k)$ - in $F_n(k)$ modi! - poi vedevo $f(k+1)$, in n modi)

2 calcolo di $I_n(k) := |\text{arg}(\underline{u}^k)|$

con $\text{arg}(\underline{u}^k) := \{f \mid f \in \underline{u}^k, f \text{ è iniettiva}\}$,

NOTA: il risultato vale anche per $k \geq n$.

Soluzioni: di nuovo, posso studiare $I_n(k)$ ricorsivamente in k .

così, $I_n(k) := |\text{arg}(\underline{u}^k)| \quad \forall k \leq n, k \neq 0$

mi ha $\textcircled{B} I_n(1) = n, I_n(2) = n \cdot (n-2), I_n(3) = n(n-1)(n-2),$

e in generale $I_n(k+1) = I_n(k) \cdot (n-k) \Leftrightarrow$ formula ricorsiva $\textcircled{FR}$

$\Rightarrow$ FORMULA COMPATTA: $\textcircled{FC}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{scelte} \\ \text{di } f(1), \dots, f(k) \\ \text{(iniettivamente)} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{scelte possibili} \\ \text{di } f(k+1) \in \underline{u} \setminus \{f(1), \dots, f(k)\} \end{array} \right\}$

$$I_n(k) = \prod_{s=0}^{k-1} (n-s) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

OK

Dim: induzione su k :

$$\boxed{k \Rightarrow k+1} \quad I_n(k+1) \stackrel{\textcircled{FR}}{=} I_n(k) \cdot (n-k) \stackrel{\text{HPLnd}}{=} \prod_{s=0}^{k-1} (n-s) \cdot (n-k) = \prod_{s=0}^k (n-s) \quad \textcircled{OK}$$

N.B.: la dimostrazione per induzione fatta ora è esattamente la

formalizzazione corretta del procedimento della formula compatta $\textcircled{FC}$ e partire da $\textcircled{B}$ (base) e dalla formula ricorsiva $\textcircled{FR}$ (passo induttivo).

ec. 3-

[3] calcolo di $|S(n)|$ ($\Rightarrow$ n fattoriale)

con $S(n) := \{ \text{permutazioni di } n \} = \{ f \in M_n \mid f \text{ è invertibile} \}$

Soluzione: $S(n) = \text{Inj}(n^{\underline{n}})$, $\Rightarrow$ da [2] per $k=n$ si ha la soluzione: $|S(n)| = \prod_{s=0}^{n-1} (n-s) = \prod_{n=1}^n n = n!$

[Def.]: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n! := \prod_{n=1}^n n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n =:$ fattoriale di n
& definizione ricorsiva: $0! := 1$, $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

VICEVERSA, viceversa $|S(n)|$ omnia $|\text{Inj}(n^{\underline{k}})| := \forall 1 \leq k \leq n$,

$$|S(n)| = |\text{Inj}(n^{\underline{k}})| \cdot |\text{Inj}(n^{\underline{n-k}})| =$$

scelgo k
elementi
(diversi) tra n

poi

scelgo altri $n-k$
elementi (diversi) tra
i rimanenti $n-k \dots$

$$= |\text{Inj}(n^{\underline{k}})| \cdot |S(n^{\underline{n-k}})| \Rightarrow |\text{Inj}(n^{\underline{k}})| = \frac{|S(n)|}{|S(n^{\underline{n-k}})|} \quad (*)$$

[N.B.]: da (*) e [3] siamo $|\text{Inj}(n^{\underline{k}})| = \frac{n!}{(n-k)!}$

che è coerente con $\text{Inj}(n^{\underline{k}}) = \prod_{s=0}^{k-1} (n-s) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$

4 Calcolo di $|B_k(n)| =: C(n, k) \quad \forall 0 \leq k \leq n$

con $B_k(n) := \{Y \mid Y \in \mathcal{P}(n), |Y| = k\} =$
 $= \{\text{parti di } n \text{ con } k \text{ elementi}\}$

Def.:

$$\binom{n}{k} := |B_k(n)| = \text{coefficiente binomiale}$$

"n sopra k"; $[L-L]$ si chiama $C(n, k)$

Esempio: Quante squadre diverse si possono formare
 scegliendo 11 giocatori in una rosa di 23 calciatori?

Risposta: $\binom{23}{11} = \frac{23!}{11!(23-11)!} = \frac{23!}{11!12!}$ N.B.: si fa così, questo sta in $\mathbb{Q}$... ma in $\mathbb{N}$???

Soluzione (generale): Per calcolare $|B_k(n)|$, ogni elemento
 $Y \in B_k(n)$ lo penso come immagine di una $f \in \mathcal{F}_n(n^k)$

PERO' ci sono funzioni diverse che hanno la stessa immagine:

$$\exists f', f'' \in \mathcal{F}_n(n^k) : f' \neq f'', \quad \mathcal{I}_n(f') = \mathcal{I}_n(f'') = Y$$

e cioè $\circledast \{f'(1), \dots, f'(k)\} = Y = \{f''(1), \dots, f''(k)\}$

MA * considero a 2! funzione $\sigma \in \mathbb{Z}_k^k$ tale che $f'(i) = f''(\sigma(i))$, $\forall i=1, \dots, k$; inoltre, $\sigma \in S(k)$, cioè σ è invertibile!

$\Rightarrow$ QUINDI le funzioni con la stessa immagine γ sono $|S(k)| = k!$

PERCIO'

$$|D_k(\underline{n})| = \frac{\text{deg}(\underline{n-k})}{|S(k)|} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

così

$$|D_k(\underline{n})| = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

CASI SPECIALI:

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

PROPRIETA' DI $\binom{n}{k}$

I coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ hanno diverse proprietà; alcune da identità. Ète possono essere dimostrate sia per via combinatoria che per via algebrica, usando la formula esplicita $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

①

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

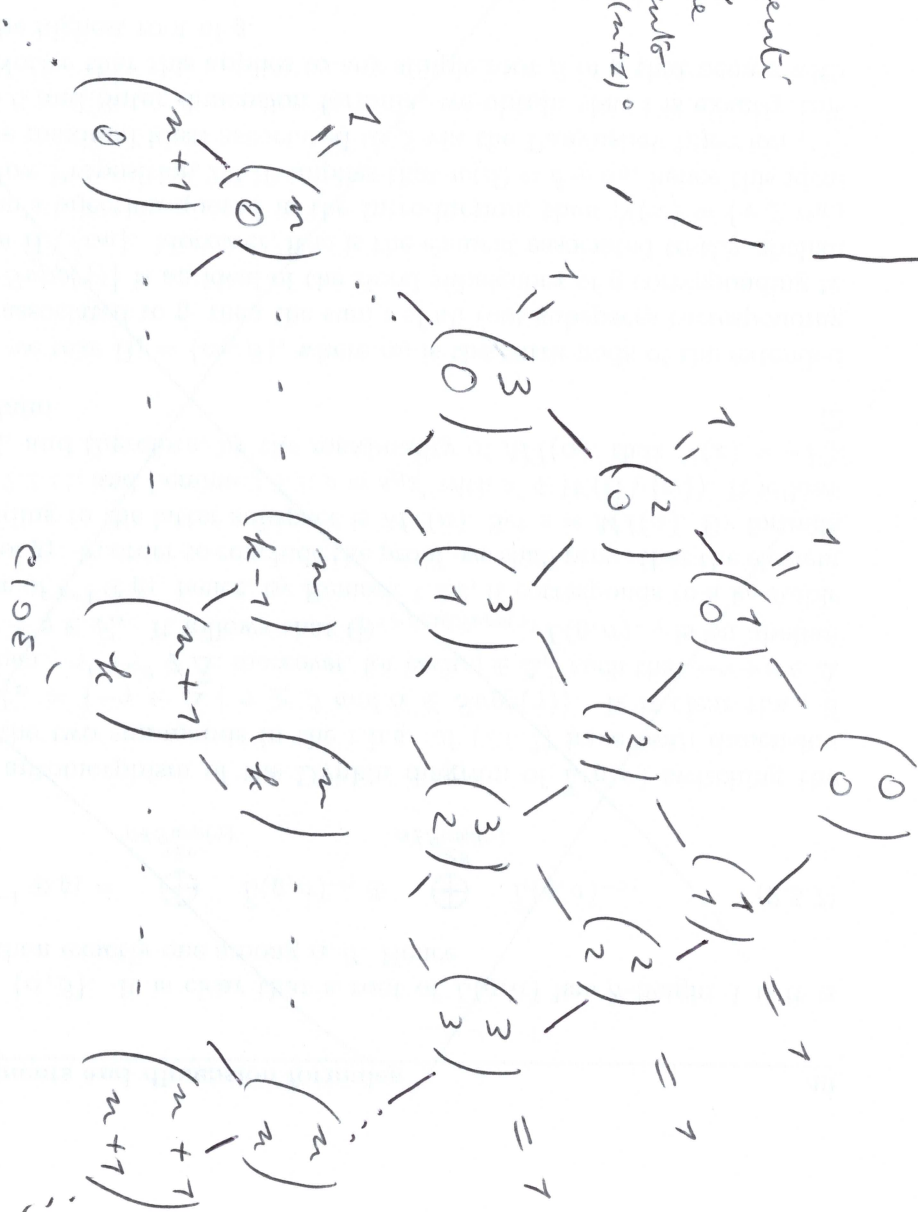
↑
sceglie k elementi tra $n+1$

↑
sceglie k elementi tra n , escludendo l' $(n+1)^o$

↑
sceglie $(k-1)$ elementi tra n , poi come k elementi sceglie l' $(n+1)^o$

TRIANGOLO DI
PASCAL-TARTAGLIA

QUESTA identità ci consente di disegnare il triangolo di Pascal o di Tartaglia, in cui "ogni elemento è somma dei due elementi al di sopra di esso (a destra)"



N.B.:

① & ② si prestano a fare induzione su n

③

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$0 \leq k \leq n$$



N.B.: scegliere $x_1, \dots, x_k$ in $\underline{n}$ equivale a scegliere gli $n-k$ elementi di $\underline{n} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$

in particolare $\binom{n}{k=1},$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

④ Sviluppo del binomio di Newton: $A, Y : X \cdot Y = Y \cdot X,$

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot X^k \cdot Y^{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dim. combinatoria: OK; Dim. ALGEBRA: induzione su n , usando ② & ④.

COROLLARIO: $(X=1, Y=1)$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad \text{cioè: } \left[\text{Somma dei numeri sulla riga } n \text{ del triangolo di Pascal-Tartaglia} \right] = 2^n$$

N.B.: segue da ④, ma anche da

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n |\delta_k(\underline{n})| = \left| \bigcup_{k=0}^n \delta_k(\underline{n}) \right| = |\delta(\underline{n})| = |\underline{2}^n| = |2^n| = 2^n$$

[5] calcolo di $|P_{k_1, \dots, k_s}(n)|$ "ordered partitions" $\hookrightarrow$ [11] 96.3

con $P_{k_1, \dots, k_s}(n) := \left\{ \{Y_1, \dots, Y_s\} \mid Y_i \in P(n), |Y_i| = k_i \ \forall i=1, \dots, s \right\}$
 $Y_i \cap Y_j = \emptyset \ \forall i \neq j$

cioè

$P_{k_1, \dots, k_s}(n) \cong \left\{ \text{scelte di sottoinsiemi } Y_1, \dots, Y_s \text{ disgiunti} \right\}$
di n aventi $k_1, \dots, k_s$ elementi

Soluzione: si applica s volte il lemma [4], con $\binom{n}{k_1, \dots, k_s}$ tramite induzione

$$\begin{aligned} |P_{k_1, \dots, k_s}(n)| &= |P_{k_1}(n)| \cdot |P_{k_2, \dots, k_s}(n - k_1)| = \dots = \\ &= |P_{k_1}(n)| \cdot |P_{k_2}(n - k_1)| \cdot |P_{k_3, \dots, k_s}(n - k_1 - k_2)| = \dots = \\ &= |P_{k_1}(n)| \cdot |P_{k_2}(n - k_1)| \cdot \dots \cdot |P_{k_s}(n - k_1 - \dots - k_{s-1})| = \\ &= \prod_{i=1}^s |P_{k_i}(n - k_1 - \dots - k_{i-1})| = \prod_{i=1}^s \binom{n - k_1 - \dots - k_{i-1}}{k_i} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_s!} \end{aligned}$$

Def: $\binom{n}{k_1, \dots, k_s} := |P_{k_1, \dots, k_s}(n)| = \frac{n!}{k_1! \dots k_s!}$ N.B.: $\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$

Esercizio:

$(x_1 + \dots + x_s)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_s = n} \binom{n}{k_1, \dots, k_s} \cdot x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall x_1, \dots, x_s = x_i x_j = x_j x_i \quad \forall i, j = 1, \dots, s$

—ce.g—