# ALGEBRA 1 - 18/01/2021

**MEMO 1** Si dice anello un insieme $A$ con due operazioni $+$ e $\cdot$ tali che

$\boxed{+}$ $(A;+)$ è gruppo abeliano (= commutativo)

$\boxed{\cdot}$ $(A;\cdot)$ è semigruppo cioè $\cdot$ è associativa

$\boxed{D\cdot/+}$ $\cdot$ è distributiva a destra & sinistra rispetto a $+$

Un anello $A$ si dice:

- commutativo se $\cdot$ è commutativa
- unitario se $\exists$ in $(A;\cdot)$ un elemento neutro $1_A$
- integro se è privo di divisori di zero
- un corpo se è unitario e $U(A) = A \setminus \{0_A\} =: A^*$
- un campo se è un corpo commutativo

**MEMO 2** $\forall$ anelli $A$, $R$, si dice (omo)morfismo (di anelli) da $A$ ad $R$ ogni funzione $\varphi : A \longrightarrow R$ che sia un morfismo per entrambe le operazioni $+$ e $\cdot$, cioè $\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$, $\varphi(a_1 \cdot a_2) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2)$ $\forall a_1, a_2 \in A$

**N.B.:** si dice monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo di anelli in modo analogo a quanto si fa per i gruppoidi:

"epi-" := suriettivo, "mono-" := iniettivo, "iso-" := invertibile.

**Esercizio 1:** $\forall$ morfismo di anelli $\varphi : A \longrightarrow R$,

$Im(\varphi) := \varphi(A)$ è sottoanello di $R$,

$Ker(\varphi) := \varphi^{-1}(0_R)$ è sottoanello di $A$

**MEMO 3** $\forall$ anello $(A;+,\cdot)$, $\forall$ insieme $E$, $(A^E;\oplus,\odot)$ è un anello per le operazioni $\oplus$ e $\odot$ date da

$$(h\oplus k)(e) := h(e)+k(e), \quad (h\oplus k)(e) := h(e)+k(e),$$

$$\forall\, e\in E, \quad \forall\, h,k\in A^E := \{\, f : E \longrightarrow A \,\}$$

**Esercizio 2:** $\forall$ gruppo abeliano $(\Gamma;+)$, l'insieme $End_g(\Gamma;+)$ degli endomorfismi (di gruppo) di $(\Gamma;+)$ è un anello unitario per le operazioni $\oplus$ e $\circ$ (= composizione)

**N.B.:** invece $(\Gamma^\Gamma;\oplus,\circ)$ non è anello

& $\big(End_g(\Gamma;+);\oplus,\odot\big)$ non è anello

## TEOREMA di CAYLEY: $\forall$ semigruppo $(S;*)$

$\exists$ azione (regolare sinistra) $\quad \begin{array}{rcl} S\times S & \longrightarrow & S \\ (\sigma,s) & \longmapsto & \sigma.s := \sigma * s \end{array}$

&

$\exists$ una rappresentazione $\boxed{\text{MORFISMO!}}$ (regolare sinistra) $\quad \begin{array}{rcl} \lambda : (S;*) & \longrightarrow & (S^S;\circ) \\ \sigma & \longmapsto & \lambda(\sigma)\begin{pmatrix} S \longrightarrow S \\ s \longmapsto \sigma * s \end{pmatrix} \end{array}$

**ORA** $\forall$ anello $(A;+,\cdot)$ $\rightsquigarrow$ $\exists$ due azioni & $\exists$ due morfismi

$$\begin{array}{rcl} \lambda^+ : (A;+) & \longrightarrow & (\mathcal{S}(A);\circ) \\ \alpha & \longmapsto & \lambda^+(\alpha)\begin{pmatrix} A \longrightarrow A \\ a \longmapsto \alpha + a \end{pmatrix} \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{rcl} \lambda^\cdot : (A;\cdot) & \longrightarrow & (A^A;\circ) \\ \alpha & \longmapsto & \lambda^\cdot(\alpha)\begin{pmatrix} A \longrightarrow A \\ a \longmapsto \alpha \cdot a \end{pmatrix} \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ studiamo $\lambda^\cdot$ !!!

# TEOREMA di CAYLEY (per anelli)

$\forall$ anello $(A;+,\cdot)$, l'azione regolare sinistra associata al prodotto $\cdot$ definisce un morfismo di anelli

$$\lambda : (A;+,\cdot) \longrightarrow \left(End_g(A;+);\ \oplus,\ \circ\right) \ \left(\subseteq A^A\right)$$

$$\alpha \longmapsto \lambda(\alpha) \begin{pmatrix} A \longrightarrow A \\ a \longmapsto \alpha \cdot a \end{pmatrix} \qquad \lambda^{\cdot}(\alpha)$$

Inoltre, se $A$ è unitario, allora tale morfismo $\lambda$ è unitario (cioè $\lambda(1_A) = id_A$) ed è iniettivo.

Dim.: Prendendo $\lambda := \lambda^{\cdot} : A \longrightarrow A^A$ sappiamo già (Teorema di Cayley per semigruppi) che

1. $\lambda := \lambda^{\cdot}$ è un morfismo da $(A;\cdot)$ a $(End_g(A;+);\circ)$

Resta da provare che

(2) $\lambda(\alpha_1+\alpha_2) = \lambda(\alpha_1) \oplus \lambda(\alpha_2)$, $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in A$

(3) $\lambda(A) \subseteq End_g(A;+)$ cioè $\lambda(\alpha)$ è morfismo per $+$, $\forall \alpha \in A$

ché allora (1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ $\lambda := \lambda^{\cdot}$ è morfismo di anelli da $(A;+,\cdot)$ a $(End_g(A;+);\oplus,\circ)$, q.e.d.

<u>ORA</u>:

- $\forall\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha, a \in A$ si ha

$$\big(\lambda(\alpha_1+\alpha_2)\big)(a) := (\alpha_1+\alpha_2)\cdot a \overset{(D)\,\boxed{SX}}{=\!=} \alpha_1 \cdot a + \alpha_2 \cdot a =$$

$$=: \big(\lambda(\alpha_1)\big)(a) + \big(\lambda(\alpha_2)\big)(a) =: \big(\lambda(\alpha_1) \oplus \lambda(\alpha_2)\big)(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(\alpha_1+\alpha_2) = \lambda(\alpha_1) \oplus \lambda(\alpha_2) \Rightarrow \quad (1)$$

- $\forall\ \alpha, a_1, a_2 \in A$ si ha

$$(\lambda(\alpha))(a_1+a_2) := \alpha\cdot(a_1+a_2) \overset{\text{D DX}}{=} \alpha\cdot a_1 + \alpha\cdot a_2 =$$

$$=: (\lambda(\alpha))(a_1) + (\lambda(\alpha))(a_2) \implies 2$$

Infine, se $\exists\ 1_A \in A$ sappiamo già che $\lambda(1_A) = id_A$ e $\lambda$ è iniettivo, per il Teorema di Cayley per monoidi applicato a $(A;\cdot)$

$\boxed{\text{MEMO:}}$ $(\lambda(1_A))(a) := 1_A\cdot a = a = id_A(a)\ ,\ \forall\, a \in A \implies$ ok

$\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in A\ ,\ \lambda(\alpha_1) = \lambda(\alpha_2) \implies$

$$\implies \underbrace{(\lambda(\alpha_1))(1_A)}_{\alpha_1 = \alpha_1\cdot 1_A} = \underbrace{(\lambda(\alpha_2))(1_A)}_{\alpha_2\cdot 1_A = \alpha_2} \implies \alpha_1 = \alpha_2 \implies \text{ok}$$

$\square$

**MORALE:** il Teorema di Cayley per semigruppi

$\exists$ morfismo di semigruppi $(\Sigma;*) \xrightarrow{\lambda^*} (\Sigma^\Sigma;\circ)$

$\sigma \longmapsto \lambda^*(\sigma) \left( \begin{array}{ccc} \Sigma & \longrightarrow & \Sigma \\ s & \longmapsto & \sigma * s \end{array} \right)$

diventa

– $\exists$ monomorfismo di monoidi $(M;\cdot) \xhookrightarrow{\lambda^\bullet} (M^M;\circ)$

– $\exists$ monomorfismo di gruppi $(G;\cdot) \xhookrightarrow{\lambda^\cdot} (\mathcal{S}(G);\circ)$

– $\exists$ morfismo di anelli $(A;+,\cdot) \xrightarrow{\lambda^\cdot} (End_g(A;+);\oplus,\circ)$

– $\exists$ monomorfismo di anelli unitari $(R;+,\cdot) \xhookrightarrow{\lambda^\cdot} (End_g(R;+);\oplus,\circ)$

In particolare $M \lneqq M^M$, $G \lneqq \mathcal{S}(G)$, $R \lneqq End_g(R;+)$

# CONGRUENZE & QUOZIENTI per ANELLI

**Def. 3:** $\forall$ anello $A$, definiamo

congruenza (in $A$) := equivalenza compatibile con $+$ e $\cdot$

<u>Proposizione 4</u> (esempio fondamentale di congruenza):

$\forall$ morfismo di anelli $\varphi : A \longrightarrow B$, l'equivalenza $\rho_\varphi$ in $A$ associata a $\varphi$ è una congruenza.

<u>Dim.:</u> Tutto segue dal fatto che (dalla teoria dei gruppoidi)

$\varphi$ è morfismo per $+$ $\Rightarrow$ $\rho_\varphi$ è compatibile per $+$

$\varphi$ è morfismo per $\cdot$ $\Rightarrow$ $\rho_\varphi$ è compatibile per $\cdot$ $\square$

**Proposizione 5:** $\forall$ anello $A$, $\forall$ congruenza $\chi$ in $A$, l'insieme quoziente $A/\chi$ è un anello per le operazioni

somma: $[a']_\chi \oplus [a'']_\chi := [a'+a'']_\chi$

prodotto: $[a']_\chi \odot [a'']_\chi := [a' \cdot a'']_\chi$ $\quad \forall [a']_\chi, [a'']_\chi \in A/\chi$

Inoltre l'anello quoziente $A/\chi$ è unitario, risp. commutativo, se $A$ è unitario, risp. commutativo.

Infine, la proiezione canonica $A \xrightarrow{\pi_\chi} A/\chi$ $\left(a \longmapsto \pi_\chi(a) := [a]_\chi\right)$ è un epimorfismo di anelli.

Dim.: Dalla teoria delle congruenze e quozienti per semigruppi (e in particolare per gruppi) sappiamo che:

(1) $\oplus$ e $\odot$ sono ben definite

(2) $\pi_\chi : A \twoheadrightarrow A/\chi$ è un epimorfismo sia per $+$ che per $\cdot$

(3) $\left(A/\chi\,;\,\oplus\right)$ è un gruppo abeliano

(4) $\left(A/\chi\,;\,\odot\right)$ è un semigruppo

Inoltre (5) $(A\,;\,\cdot)$ è unitario $\Rightarrow$ $\left(A/\chi\,;\,\odot\right)$ è unitario

& (6) $(A\,;\,\cdot)$ è commutativo $\Rightarrow$ $\left(A/\chi\,;\,\odot\right)$ è commutativo

Infine, $\cdot$ è distributiva (a dx/sx) rispetto a $+$ in $A$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\odot$ è distributiva (a dx/sx) rispetto a $\oplus$ in $A/\chi$

QUINDI $\left(A/\chi\,;\,\oplus,\odot\right)$ è un anello (eventualmente unitario/commutativo)

e $\pi_\chi : A \longrightarrow A/\chi$ è un epimorfismo di anelli. $\square$

$\boxed{\text{NOTA:}}$ non tutte le proprietà di $A$ sono "trasmesse" ad $A/\chi$, ad esempio (in generale)

$$A \text{ è integro } \not\Rightarrow A/\chi \text{ è integro}$$

— o —

$$\boxed{\text{CONGRUENZE} \longleftrightarrow \text{NUCLEI} \longleftrightarrow \text{IDEALI}}$$

$\boxed{\text{MEMO}}$ $\forall$ gruppo $G$ si ha

$$\{\text{congruenze in } G\}$$

$$\{e_\varphi \mid G \xrightarrow{\varphi} K \text{ morfismo}\} \longleftrightarrow \{\text{sottogruppi normali di } G\}$$

$\rightsquigarrow$ DOMANDA: che succede per un anello $A$?

RISPOSTA: la situazione è del tutto analoga $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$ dobbiamo trovare l'analogo di "(sottogruppo) normale"

**Proposizione 6** (analogo di ★): $\forall$ anello $A$ si ha

$$\{\text{congruenze in } A\} = \{\rho_\varphi \mid A \xrightarrow{\varphi} R \text{ morfismo di anelli}\}$$

cioè le congruenze in $A$ sono tutte e sole le equivalenze in $A$ associate a morfismi con dominio $A$.

*Dim.:* $\supseteq$ Abbiamo visto (Proposizione 4) che $\varphi : A \to R$ è morfismo $\Rightarrow$ $\rho_\varphi$ è congruenza; $\Rightarrow$ $\supseteq$ è ok

$\subseteq$ $\forall$ $\chi$ congruenza in $A$, $\Rightarrow \exists$ anello $A/\chi$ e $\exists$ $\pi_\chi : A \longrightarrow A/\chi$ che è morfismo di anelli.

MA $\underbrace{\rho_{\pi_\chi} = \chi}$, $\Rightarrow$ vale $\subseteq$, q.e.d. $\square$

(dalla teoria degli insiemi quozienti!)

$\boxed{\text{MEMO 7}}$ la corrispondenza ⊙ per $G := (A;+)$ abeliano è data da

$$\left\{\begin{array}{c}\text{congruenze}\\ \text{in } (A;+)\end{array}\right\} \underset{}{\overset{\odot}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{c}\text{sottogruppi (normali)}\\ \text{di } (A;+)\end{array}\right\}$$

$$\rho \longmapsto [0_A]_\rho =: I_\rho$$

$$\rho_I \longleftarrow\!\!\shortmid\; I$$

con

$$a' \rho_I a'' \overset{\Delta}{\iff} (a'-a'') \in I \iff a'+I = a''+I$$

**Problema:** in aggiunta, $\rho$ compatibile con $\cdot$ $\longleftrightarrow$ $I$ t.c. [...?...]

**Def. 8:** $\forall$ anello $A$, $\forall$ sottoinsieme $I$ di $A$ si dice

$$\text{ideale} \begin{cases}\text{sinistro}\\ \text{destro}\\ \text{bilatero (o ``ideale'')}\end{cases} \quad \text{se} \quad I \leq (A;+) \quad \& \quad \begin{cases} A\cdot I \subseteq I \\ I \cdot A \subseteq I \\ A\cdot I \cdot A \subseteq I\end{cases}$$

**NOTAZIONE:** $I$ ideale sin./des./bil. $\longleftrightarrow$ $I \trianglelefteq_s A \,/\, I \trianglelefteq_d A \,/\, I \trianglelefteq A$

$\boxed{\text{Note 9:}}$ (a) "ideale (bilatero)" = "ideale sinistro & destro"

(b) Ogni ideale sinistro / destro / bilatero di $A$ è un sottoanello

<u>Lemma 10:</u> $\boxed{\text{Hp:}}$ $A$ è un anello,

$\rho :=$ equivalenza in $A$ compatibile con $+$ $\big(=$ congruenza di $(A;+)\big)$

$\underline{I} :=$ sottogruppo di $(A;+)$

tali che $\rho \longleftrightarrow I$ nella biezione di MEMO 7

(cioè $I = [0_A]_\rho$ e $\rho = \rho_I$)

$\boxed{\text{Th:}}$ $\rho$ è compatibile con · a sinistra / destra / sinistra & destra $\Longleftrightarrow$ $I$ è ideale sinistro / destro / bilatero

Dim.: "sinistra/o" $\Rightarrow$ $\forall\, \alpha \in A,\ \forall\, i \in I \overset{Hp}{=} [0_A]_\varrho \Rightarrow$

$\Rightarrow i \,\varrho\, 0_A \underset{Hp}{\Rightarrow} (\alpha \cdot i)\,\varrho\,(\alpha \cdot 0_A) = 0_A \Rightarrow (\alpha \cdot i)\,\varrho\, 0_A \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \cdot i \in [0_A] = I\,;\ \Rightarrow A \cdot I \subseteq I \Rightarrow I \trianglelefteq_s A$, q.e.d.

$\Leftarrow$ $\forall\, \alpha, a', a'' \in A : a' \,\varrho_I\, a'' \Rightarrow (a' - a'') \in I \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha a' - \alpha a'' = \alpha (a' - a'') \in A \cdot I \underset{Hp}{\subseteq} I \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha a' - \alpha a'') \in I \Rightarrow (\alpha a')\,\varrho\,(\alpha a'')$, q.e.d.

"destra/o" $\Rightarrow$ $\forall\, \alpha \in A,\ \forall\, i \in I \overset{Hp}{=} [0_A]_\varrho \Rightarrow$

$\Rightarrow i \,\varrho\, 0_A \underset{Hp}{\Rightarrow} (i \cdot \alpha)\,\varrho\,(0_A \cdot \alpha) = 0_A \Rightarrow (i \cdot \alpha)\,\varrho\, 0_A \Rightarrow$

$\Rightarrow i \cdot \alpha \in [0_A] = I\,;\ \Rightarrow I \cdot A \subseteq I \Rightarrow I \trianglelefteq_d A$, q.e.d.

$\Leftarrow$ $\forall\, \alpha, a', a'' \in A : a' \,\varrho_I\, a'' \Rightarrow (a' - a'') \in I \Rightarrow$

$\Rightarrow a'\alpha - a''\alpha = (a' - a'')\alpha \in I \cdot A \underset{Hp}{\subseteq} I \Rightarrow$

$\Rightarrow (a'\alpha - a''\alpha) \in I \Rightarrow (\alpha a')\,\varrho\,(\alpha a'')$, q.e.d.

"sinistra/o & destra/o $\Leftrightarrow$ "bilatero" segue da quanto già visto. $\square$

Il Lemma 10 implica direttamente la seguente

**Proposizione 11** (analogo di ⊙): $\forall$ anello $A$, la biezione

$$\left\{\begin{array}{c}\text{congruenze}\\ \text{in } (A;+)\end{array}\right\} \overset{\odot}{\rightleftarrows} \left\{\begin{array}{c}\text{sottogruppi (normali)}\\ \text{di } (A;+)\end{array}\right\}$$

di cui in MEMO 7 si restringe a una biezione

$$\{\text{congruenze in } (A;+,\cdot)\} \rightleftarrows \{\text{ideali di } (A;+,\cdot)\}$$

$$\rho \longmapsto I_\rho := [0_A]_\rho$$

$$\rho_I \longleftarrow\!\shortmid\; I$$

Il prossimo risultato segue dai precedenti, ma lo possiamo dimostrare indipendentemente:

Proposizione 12 (analogo di ■): $\forall$ anello $A$ si ha

$$\{\mathrm{Ker}(\varphi) \mid A \xrightarrow{\varphi} R \text{ morfismo di anelli}\} = \{\text{ideali di } A\}$$

CIOÈ gli ideali di $A$ sono tutti e soli i nuclei dei morfismi con dominio $A$.

Dim.: $\subseteq$ $\forall$ morfismo $\varphi : A \longrightarrow R$, sia $I_\varphi := \mathrm{Ker}(\varphi)$

ALLORA $I_\varphi := \mathrm{Ker}(\varphi) \leq (A;+)$ perché $(A;+) \xrightarrow{\varphi} (R;+)$ è morfismo

$\forall\, k \in I_\varphi := \mathrm{Ker}(\varphi)$, $\forall\, \alpha \in A$, si ha

$$\varphi(\alpha k) = \varphi(\alpha)\cdot\varphi(k) = \varphi(\alpha)\cdot 0_R = 0_R \implies \alpha k \in \mathrm{Ker}(\varphi) =: I_\varphi \implies I_\varphi \trianglelefteq_s A$$

$$\varphi(k\alpha) = \varphi(k)\cdot\varphi(\alpha) = 0_R\cdot\varphi(\alpha) = 0_R \implies k\alpha \in \mathrm{Ker}(\varphi) =: I_\varphi \implies I_\varphi \trianglelefteq_D A$$

OK

$\supseteq$ $\forall\ I \trianglelefteq A,\ \Rightarrow\ I \trianglelefteq (A;+) \Rightarrow \exists\ (A/I\ ;\oplus)$ gruppo quoziente

INOLTRE, $I \trianglelefteq A \Rightarrow A\cdot I\cdot A \subseteq I \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ (ben definita!) in $A/I$ l'operazione

$$(a'+I)\odot(a''+I) \overset{\circledast}{:=} (a'\cdot a'')+I \qquad \forall\,(a'+I),(a''+I)\in A/I$$

Infatti, se $\alpha'+I = a'+I$ & $\alpha''+I = a''+I$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha'-a')\in I,\ (\alpha''-a'')\in I \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\alpha'\alpha''-a'a'') = \Big(\underbrace{\underbrace{(\alpha'-a')}_{I}\underbrace{\alpha''}_{A}}_{I\cdot A\subseteq I}+\underbrace{\underbrace{a'}_{A}\underbrace{(\alpha''-a'')}_{I}}_{A\cdot I\subseteq I}\Big) \subseteq I\cdot A + A\cdot I \subseteq I+I \subseteq I$$

QUINDI

$$(\alpha'\alpha''-a'a'')\in I, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a'a'')+I = \big((a'a'')+(\alpha'\alpha''-a'a'')\big)+I = (\alpha'\alpha'')+I \qquad \text{ok}$$

ORA $\left(A/_I \, ; \oplus, \odot\right)$ è un anello «ESERCIZIO!», e

$$\pi_I : A \twoheadrightarrow A/_I \quad \left(a \longmapsto \pi_I(a) := a + I\right)$$

è un morfismo di anelli, per il quale

$$\mathrm{Ker}(\pi_I) := \pi_I^{-1}(0_{A/_I}) = \{a \in A \mid a + I = 0_A + I = I\} = I$$

così che $I = \mathrm{Ker}(\pi_I)$ è nucleo di un morfismo di anelli, come richiesto. $\square$

---

**Esercizio 13:** $\forall$ anello $A$, si dice centro di $A$ il sottoinsieme $Z(A) := \{z \in A \mid z \cdot a = a \cdot z \,, \ \forall a \in A\}$

**Th:** $Z(A)$ è sottoanello di $A$.

# ESEMPI di ANELLI

(1) $\forall$ anello $A$, $n \in \mathbb{N}_+$, $\exists\ M_n(A) = \mathrm{Mat}_{n\times n}(A)$

con: somma componente x componente
prodotto righe per colonne

$\rightsquigarrow$ $(M_n(A); +, \cdot)$ è anello

$\boxed{\text{N.B.:}}$ (I) $A$ unitario $\Rightarrow$ $M_n(A)$ unitario, $1_{M_n(A)} = \begin{pmatrix} 1_A & & \emptyset \\ & 1_A & \\ \emptyset & & \ddots & 1_A \end{pmatrix}$

(II) $\left.\begin{array}{l} n > 1 \\ A \cdot A \neq \{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow M_n(A)$ <u>non</u> è commutativo

p.es., $x, y \in A : xy \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & xy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ è campo $\Rightarrow$ $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}; \oplus, \odot)$ è anello commutativo unitario, <u>ma</u> NON è campo

(3) $\mathrm{Lim}_{x_0}^{\mathbb{R}} := \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \}$

(I) $\mathrm{Lim}_{x_0}^{\mathbb{R}}$ è sottoanello di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

(II) $\lim_{x \to x_0} : \mathrm{Lim}_{x_0}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R} \ \left( f \longmapsto \lim_{x \to x_0} f(x) \right)$ è un morfismo

(4) $C^0(\mathbb{R}) : \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è continua} \}$

(I) $C^0(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (II) $C^0(\mathbb{R}) \leq \bigcap_{x_0 \in \mathbb{R}} \mathrm{Lim}_{x_0}^{\mathbb{R}} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

(5) $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}) := \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a, b \in \mathbb{R} : f(x) = ax + b, \ \forall x \in \mathbb{R} \}$

$\mathrm{Lin}(\mathbb{R}) \leq (C^0(\mathbb{R}); +)$ MA $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}) \not\leq (C^0(\mathbb{R}); +, \cdot)$

(6) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{ \text{successioni di numeri reali} \}$

$\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) := \{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid \exists \lim_{n \to +\infty} a_n \in \mathbb{R} \} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\mathrm{Div}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) := \{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid \exists \lim_{n \to +\infty} a_n = \pm\infty \} \not\leq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

(7) **POLINOMI, SERIE (FORMALI), ECC.** (in $x$ a coefficienti in $A$)

$\forall$ anello $A$, definiamo

**Polinomi:**

$$A[x] := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,\middle|\, \begin{array}{l} n \in \mathbb{N},\ a_k \in A,\ \forall k \\ a_n \neq 0 \ \text{se}\ n \neq 0 \end{array} \right\} \quad \left( \sim \left\{ \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists\, n \in \mathbb{N} : \\ a_k = 0 \ \ \forall k > n \end{array} \right\} \right)$$

**Serie (formali di potenze):**

$$A[[x]] := \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ a_k \in A,\ \forall k \right\} \quad \left( \sim \left\{ \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \right\} = A^{\mathbb{N}} \right)$$

**Polinomi di Laurent:**

$$A[x, x^{-1}] := \left\{ \sum_{k=-\ell}^{n} a_k x^k \,\middle|\, \begin{array}{l} n, \ell \in \mathbb{N},\ a_k \in A,\ \forall k \\ a_n \neq 0 \neq a_{-\ell} \ \text{se}\ n + \ell \neq 0 \end{array} \right\} \quad \left( \sim \left\{ \{a_k\}_{z \in \mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}} \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists\, n, \ell \in \mathbb{N} : \\ a_k = 0 \ \ \forall k > n \\ \qquad \forall k < -\ell \end{array} \right\} \right)$$

**Serie (formali) di Laurent:**

$$A((x)) := \left\{ \sum_{k=t}^{+\infty} a_k x^k \,\middle|\, \begin{array}{l} t \in \mathbb{Z},\ a_k \in A \ \ \forall k \\ a_t \neq 0 \ \ \text{se}\ \exists\, k : a_k \neq 0 \end{array} \right\} \quad \left( \sim \left\{ \{a_k\}_{z \in \mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}} \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists\, t \in \mathbb{Z} : \\ a_k = 0 \ \ \forall k < t \end{array} \right\} \right)$$

## Somma & Prodotto in $A[x]$, $A[[x]]$, $A[x,x^{-1}]$, $A((x))$ :

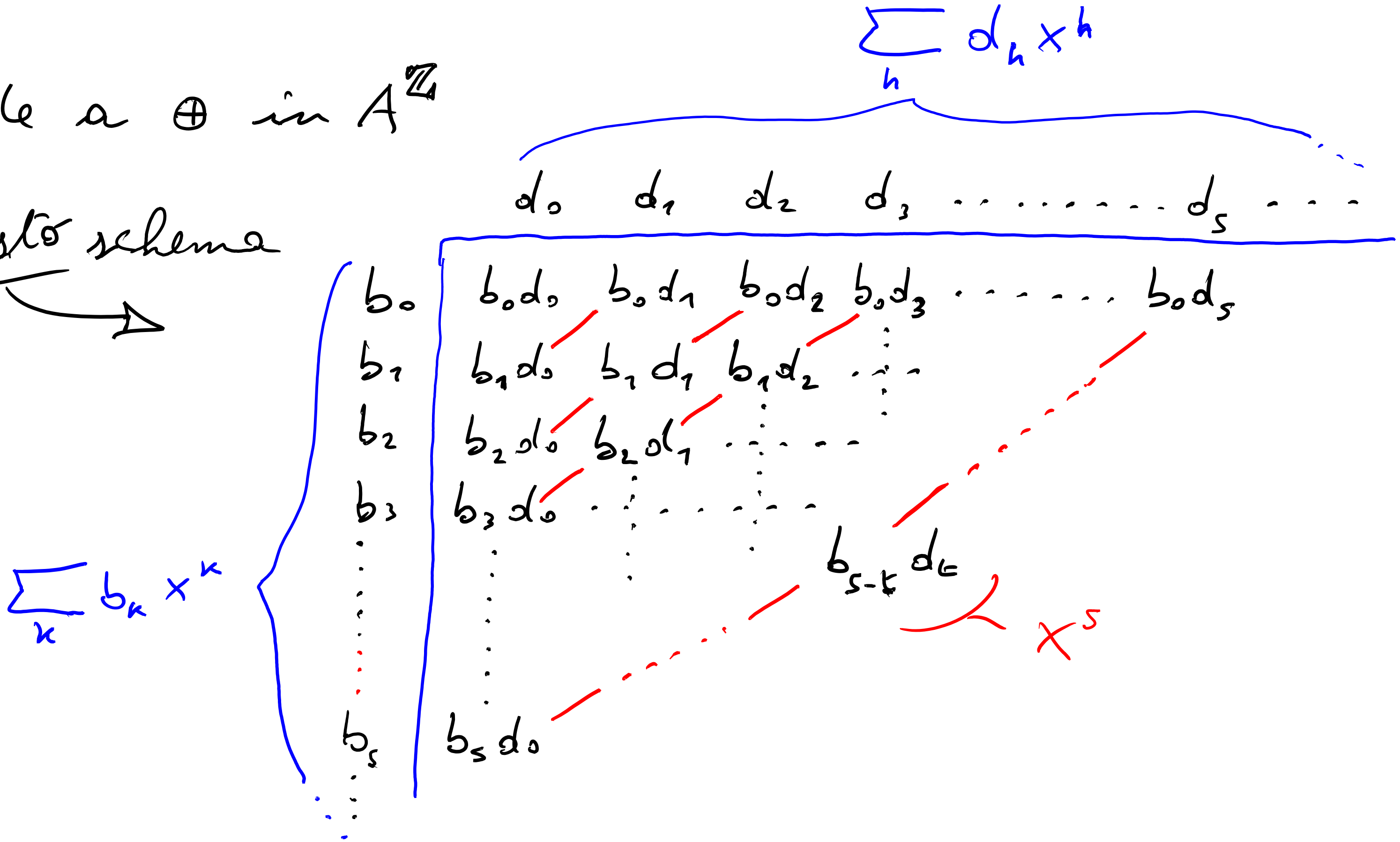
$\boxed{+}$ $$\left(\sum_k b_k x^k\right) + \left(\sum_h d_h x^h\right) := \sum_s c_s x^s \,, \qquad c_s := b_s + d_s \quad (\forall s)$$

$\boxed{\cdot}$ $$\left(\sum_k b_k x^k\right) \cdot \left(\sum_h d_h x^h\right) := \sum_s a_s x^s \,, \qquad a_s := \sum_{k+h=s} b_k \cdot d_h \quad (\forall s)$$

$\boxed{\text{N.B.:}}$ $\boxed{+}$ corrisponde a $\oplus$ in $A^{\mathbb{Z}}$

$\boxed{\cdot}$ corrisponde a questo schema $\longrightarrow$

(per $A[x,x^{-1}]$ e $A((x))$ dev'essere ancora allargato)



$\boxed{\text{FATTO}}$ Con le operazioni $\boxed{+}$ e $\boxed{\cdot}$ (nell'ordine)

(1) $A[x]$, $A[[x]]$, $A[x, x^{-1}]$ e $A((x))$ sono anelli

(2) Se $A$ è unitario, allora gli anelli $A[x]$, $A[[x]]$, $A[x, x^{-1}]$ e $A((x))$ sono unitari

(3) Se $A$ è commutativo, allora gli anelli $A[x]$, $A[[x]]$, $A[x, x^{-1}]$ e $A((x))$ sono commutativi

(4) Valgono le inclusioni come sottoanelli

$$A \leq A[x] \leq A[[x]] \leq A((x))$$

$$A[x] \leq A[x, x^{-1}] \leq A((x))$$

ESERCIZI: $\forall$ anello $A$ unitario, commutativo e integro

① $\mathcal{U}(A[x]) = \mathcal{U}(A)$

② $\mathcal{U}(A[x, x^{-1}]) = \{\alpha \cdot x^z \mid z \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathcal{U}(A)\}$

③ $\mathcal{U}(A[[x]]) = \mathcal{U}(A) + x \cdot A[[x]] =$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \;\middle|\; \begin{array}{l} a_k \in A, \forall k \in \mathbb{N} \\ a_0 \in \mathcal{U}(A) \end{array} \right\}$$

$\boxed{\text{SUGG.:}}$ $\quad 1 + x(\ ) + (x(\ ))^2 + \ldots$

$$\exists\, (1-y)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n = 1 + y + y^2 + \cdots + y^n + \cdots$$

$$(1-y)(1+y+y^2+\cdots) = 1 + \cancel{y} + \cancel{y^2} + \cancel{y^3} \cdots - \cancel{y} - \cancel{y^2} - \cancel{y^3} - \cdots$$

④ $\mathcal{U}(A((x))) = \left\{ \sum_{k=t}^{+\infty} a_k x^k \in A((x)) \;\middle|\; a_t \in \mathcal{U}(A) \right\} =$

$$= \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \left( x^z \cdot \mathcal{U}(A[[x]]) \right)$$