APPUNTI CORSO DI ALGEBRA 3 A.A. 2017–2018 LIEVEMENTI RIVISTI (AGGIORNATI IL 13/11/2020)

MARTINA LANINI

Indice

1. Teoria delle categorie

Le nostre referenze principali per questa parte del corso sono [3] e [6].

1.1. **Prime definizioni e primi esempi.**

Teoria delle categorie ci permetterà di studiare concetti matematici da un punto di vista formale. In particolare, vedremo come molte delle strutture (soprattutto algebriche) che avete incontrato possano essere analizzate da questo punto di vista.

Cominciamo pertanto analizzando un esempio a voi più che familiare: le funzioni tra insiemi.

Esempio 1.1. *Siano A e B insiemi. Una funzione f è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ avente la proprietà che per ogni $a \in A$ esiste un unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$. (in tal caso denotiamo $b = f(a)$).*

Cosa possiamo dire sulle funzioni tra insiemi?

*Prima di tutto, per ogni insieme A abbiamo sempre una funzione speciale (**funzione identità**):*

$$\mathbf{1}_A : A \to A, \quad \text{data da } \mathbf{1}_A(a) = a \text{ per ogni } a \in A.$$

Inoltre, dati tre insiemi A, B, C e due funzioni

$$f : A \to B \quad g : B \to C,$$

*le possiamo **comporre** per ottenere una terza funzione :*

$$g \circ f : A \to C, \quad \text{data da } g \circ f(a) = g(f(a)).$$

Vi sono poi delle proprietà che le funzioni tra insiemi hanno.

- *(**associatività**) Siano A, B, C, D quattro insiemi e consideriamo le tre funzioni*

  $$f : A \to B, \quad g : B \to C, \quad h : C \to D,$$

  allora $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
- *Siano A, B due insiemi. Per ogni funzione $f : A \to B$, si ha*

  $$f \circ \mathbf{1}_A = f = \mathbf{1}_B \circ f$$

Queste sono le proprietà che vogliamo assiomatizzare e la definizione di categoria sarà un'astrazione dell'esempio appena visto.

Definizione 1.2. *Una* categoria $\mathbf{C}$ *è il dato di*

- *una collezione* $Ob(\mathbf{C})$ *di* oggetti *(per i quali useremo lettere maiuscole:* $A, B, C, \ldots$*);*
- *una collezione* $\mathbf{C}(A, B)$ *di* morfismi *(o* frecce*) per ogni coppia di oggetti* $A, B \in Ob(\mathbf{C})$ *(anche denotato* $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$*);*
- *una legge* di composizione
$$\circ : \mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}(B, C) \to \mathbf{C}(A, C), \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$
per ogni tre oggetti $A, B, C \in Ob(\mathbf{C})$
- *un* morfismo identità $\mathbf{1}_A \in \mathbf{C}(A, A)$ *per ogni* $A \in Ob(\mathbf{C})$

che soddisfano

C1: *se* $f \in \mathbf{C}(A, B)$*, allora* $f \circ \mathbf{1}_A = f = \mathbf{1}_B \circ f$*,*
C2: *se* $f \in \mathbf{C}(A, B)$*,* $g \in \mathbf{C}(B, C)$*,* $h \in \mathbf{C}(C, D)$*, allora* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$*.*

Osservazione 1.3. *Le proprietà (C1) e (C2) ci dicono che la legge di composizione è associativa ed unitaria.*

Definizione 1.4. *Se* $f \in \mathbf{C}(A, B)$*, allora* A *si chiama* dominio *di* f *e* B codominio *di* f*.*

Osservazione 1.5. *Assumeremo che gli spazi di morfismi sono a due a due disgiunti, cioè che se* $f \in \mathbf{C}(A, B)$ *e* $f \in \mathbf{C}(C, D)$ *allora* $A = C$ *e* $B = D$*.*

Esempio 1.6. *Qui di seguito una lista di esempi di categorie.*

(1) *Esempi algebrici:*
   - **Ins***, la categoria degli insiemi, come visto prima;*
   - **Mon***, la categoria dei monoidi, con omomorfismi di monoidi;*
   - **Grp***, la categoria dei gruppi,con omomorfismi di gruppi;*
   - **Ab***, la categoria dei gruppi abeliani, con omomorfismi di gruppi;*
   - $\mathbf{Vec}_k$*, la categoria degli spazi vettoriali sul campo* k*, con omomorfismi di spazi vettoriali;*
   - **Rng***, la categoria degli anelli (non necessariamente unitari) con omomorfismi di anelli;*
   - **CRng***, la categoria degli anelli commutativi con omomorfismi di anelli;*
   - $A-\mathbf{Mod}$*, la categoria dei moduli su un anello commutativo unitario* A *, con morfismi di moduli (studieremo questa categoria nella seconda parte di questo corso);*
   - $A - \mathbf{Alg}$*, la categoria delle algebre su un anello, con morfismi di* A*-algebre (studieremo questa categoria nel caso in cui* A *è commutativo nella seconda parte di questo corso).*

(2) *Esempi dalla topologia:*
   - **Top***, la categoria degli spazi topologici con le applicazioni continue;*

(3) *Esempi dalla combinatoria:*

- **Grafi**, *la categoria dei grafi, con le applicazioni tra gli insiemi dei vertici che preservano adiacenze.*
- **DGrafi**, *la categoria dei grafi orientati, con* **DGrafi**(A, B) *date da applicazioni f tra gli insiemi dei vertici che preservano adiacenze, tali che se $a \to b$ è un lato di A, allora $f(a) \to f(b)$ è un lato di B.*

Tutte le categorie nell'esempio precedente sono *categorie concrete*, i cui oggetti sono insiemi arricchiti da qualche struttura, i cui morfismi sono funzioni su insiemi che preservano la struttura, la composizione è la solita composizione e le identità sono le funzioni identità. Pertanto, per dimostrare che sono effettivamente categorie bisogna solo verificare che la composizione di due morfismi è effettivamente un morfismo e che la funzione identità è un morfismo.

Esercizio 1.7. *Si dimostri che le identità in una categoria sono uniche.*

Definizione 1.8. *Una categoria* $\mathbf{C}$ *si dice* localmente piccola *se* $\mathbf{C}(A, B)$ *è un insieme per ogni coppia di oggetti $A, B \in Ob(\mathbf{C})$. Una categoria* $\mathbf{C}$ *localmente piccola si dice piccola se inoltre anche $Ob(\mathbf{C})$ è un insieme. Una categoria non piccola si dice* grande.

Esempio 1.9. *La categoria* **Ins** *non è piccola e questo segue dal paradosso di Russel. Il paradosso di Russel ci dice che la collezione di tutti gli insiemi non è un insieme: sia $R = \{x \text{ insieme } \mid x \notin x\}$. Supponiamo, per assurdo, che R sia un insieme Possiamo ora chiederci se $R \in R$. Vediamo subito che $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$. Assurdo.*

Più in generale, le categorie dell'Esempio 1.6 sono tutte grandi.

Esempio 1.10. *A seguire una lista di categorie piccole:*

- *la categoria vuota* $\mathbf{0}$, *cioè senza oggetti (e dunque senza morfismi),*
- *la categoria* $\mathbf{1}$, *data da $Ob(\mathbf{1}) = \{*\}$ e $\mathbf{1}(*, *) = \{\mathbf{1}_*\}$. La composizione è chiaramente a questo punto univocamente determinata.*
- *Sia G un gruppo, allora possiamo definire la categoria* $\mathbf{G}$ *associata al gruppo G nel modo seguente: $Ob(\mathbf{G}) = \{*\}$ e $\mathbf{G}(*, *) = G$, con composizione data dalla moltiplicazione nel gruppo e morfismo identità uguale a e_G (l'elemento neutro del gruppo).*
- *Sia P un insieme e $\leq$ una relazione di preordine (cioè una relazione riflessiva e transitiva). Otteniamo una categoria* $\mathbf{P}$ *nel modo seguente: $Ob(\mathbf{P}) = P$, e, per ogni due elementi $p, q \in P$,*

$$\mathbf{P}(p, q) = \begin{cases} p \to q & \textit{if } p \leq q \\ \emptyset & \textit{if } p \not\leq q. \end{cases}$$

La composizione dunque sarà $p \to q \circ q \to r = p \to r$ se $p \leq q \leq r$. Infine i morfismi identità saranno $p \to p$, che è ben definito data la proprietà riflessiva.

Esercizio 1.11. *Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ il suo insieme delle parti. Si verifichi che la relazione di inclusione $\subseteq$ è un ordinamento parziale su $\mathcal{P}$. Si verifichino tutti gli assiomi della risultante categoria.*

Definizione 1.12. *Una categoria i cui morfismi sono solo i morfismi identità è detta* discreta.

Esempio 1.13.
- *La categoria $\mathbf{1}$ è un esempio di categoria discreta.*
- *Ogni insieme può essere visto come una categoria discreta i cui oggetti sono gli elementi.*

Definizione 1.14. *Un morfismo $f \in \mathbf{C}(A, B)$ è un* isomorfismo *se esiste un morfismo $g \in \mathbf{C}(B, A)$ tale che $g \circ f = \mathbf{1}_A$ e $f \circ g = \mathbf{1}_B$.*

Esempio 1.15. *Nella categoria associata ad un insieme parzialmente ordinato gli unici isomorfismi sono i morfismi identità.*

Definizione 1.16. *Una categoria in cui tutti i morfismi sono isomorfismi è detta* gruppoide.

Esempio 1.17. *Ogni gruppo è un gruppoide con un solo oggetto.*

Esercizio 1.18. *Si considerino le due frecce $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Si dimostri che se due tra $f,\ g, g \circ f$ sono isomorfismi, allora lo è anche il terzo.*

Esempio 1.19. *Data una categoria $\mathbf{C}$ si può ottenere un gruppoide $\boldsymbol{Iso}(\mathbf{C})$ come segue: $Ob(\mathbf{Iso}(\mathbf{C})) = Ob(\mathbf{C})$, mentre i morfismi tra due oggetti A e B sono*

$$\mathbf{Iso}(\mathbf{C})(A, B) = \{f \in \mathbf{C}(A, B) \mid f \text{ è un isomorfismo}\}.$$

1.2. **Costruzione di nuove categorie da categorie date.** In questa sezione vediamo come si possono costruire nuove categorie a partire da categorie già note.

1.2.1. *Categorie opposte.* Sia $\mathbf{C}$ una categoria. La *categoria opposta* $\mathbf{C}^{\text{opp}}$ è definita da

$$\text{Ob}(\mathbf{C}^{\text{opp}}) := \text{Ob}(\mathbf{C}), \qquad \mathbf{C}^{\text{opp}}(A, B) := \mathbf{C}(B, A) \quad (\text{per ogni } A, B \in \text{Ob}(\mathbf{C}^{\text{opp}})).$$

Stiamo cioè invertendo tutte le frecce.

Questo ci dà un principio di dualità: se una proprietà P è vera in ogni categoria, allora la proprietà P^* (ottenuta invertendo tutte le frecce) è vera in ogni categoria.

1.2.2. *Sottocategorie.* Siano $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ due categorie. Allora $\mathbf{D}$ è una *sottocategoria* di $\mathbf{C}$ se $\text{Ob}(\mathbf{D}) \subseteq \text{Ob}(\mathbf{C})$ e $\mathbf{D}(A, B) \subseteq \mathbf{C}(A, B)$ per ogni coppia di oggetti $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{D})$.

Esempio 1.20. *La categoria degli anelli con unità è una sottocategoria della categoria degli anelli.*

Definizione 1.21. *Una sottocategoria* $\mathbf{D}$ *di* $\mathbf{C}$ *si dice piena se per ogni due oggetti* $A, B \in Ob(\mathbf{D}) \subseteq Ob(\mathbf{C})$ *si ha* $\mathbf{D}(A, B) = \mathbf{C}(A, B)$.

Esempio 1.22. *La categoria degli anelli con unità non è una sottocategoria piena della categoria degli anelli: presi due anelli con unità* M, N, *il morfismo costante che manda ogni elemento di* M *in* $0 \in N$ *è un morfismo di anelli ma non di anelli con unità.*

Esempio 1.23. *La categoria dei gruppi abeliani è una sottocategoria piena della categoria dei gruppi.*

1.2.3. *Categoria prodotto.* Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie. Le *categoria prodotto* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ è data da $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ if and only if $X = (A, B)$ per $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$. Dati due oggetti $(A, B), (E, F) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$, allora $h \in \mathbf{C} \times \mathbf{D}((A, B), (E, F))$ se e solo se vi sono $f \in \mathbf{C}$ e $g \in \mathbf{D}$ tali che $h = (f, g)$.

La composizione di $h = (f, g) \in \mathbf{C} \times \mathbf{D}((A, B), (E, F))$ con $k = (l, m) \in \mathbf{C} \times \mathbf{D}((E, F), (G, H))$ è $k \circ h = (l \circ f, m \circ g) \in \mathbf{C} \times \mathbf{D}((A, B), (G, H))$. Per ogni $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ l'identità è $(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) \in \mathbf{C} \times \mathbf{D}((A, B))$.

Esempio 1.24. *Se prendiamo due gruppi* G, H, *allora la categoria associata al loro prodotto diretto* $G \times H$ *è il prodotto delle categorie* $\mathbf{G}$ *e* $\mathbf{H}$ *associate ai due gruppi.*

In generale, dato un insieme di n categorie $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n$, si può definire il prodotto $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2 \times \ldots \times \mathbf{C}_n$.

1.2.4. *Categoria quoziente.* Sia $\mathbf{C}$ una categoria localmente piccola.

Definizione 1.25. *Una* congruenza $\simeq$ *su* $\mathbf{C}$ *è una relazione di equivalenza* $\simeq$ *su ogni collezione di morfismi* $\mathbf{C}(A, B)$, $A, B \in Ob(\mathbf{C})$ *avente la seguente proprietà: se* $f, f' \in \mathbf{C}(A, B)$ *sono in relazione, allora per ogni morfismo* $g : A' \to A$ *e* $h : B \to B'$, *si ha*

$$h \circ f \circ g \simeq h \circ f' \circ g. \tag{1}$$

Se si ha una congruenza $\simeq$ su $\mathbf{C}$, si può definire la categoria quoziente $\mathbf{C}/\simeq$ come segue:

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{C}/\simeq) = \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$$

e

$$(\mathbf{C}/\simeq)(A, B) = \mathbf{C}(A, B)/\simeq \qquad \text{per ogni } A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}).$$

La composizione di morfismi è ben definita grazie a (1) e, per ogni $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}/\simeq)$, l'identità $\overline{\mathbf{1}_A} \in (\mathbf{C}/\simeq)(A, A)$ è la classe di $\mathbf{1}_A \in \mathbf{C}(A, A)$.

Esempio 1.26. *Sia* G *un gruppo ed* N *un suo sottogruppo normale. La volta scorsa abbiamo definito la categoria* $\mathbf{G}$ *associata a* G. *Su* $\mathbf{G}(*, *)$, *possiamo definire la relazione di equivalenza data da* $g \simeq h$ *se e solo se* $g \in hN$. *Questa è chiaramente una congruenza. Allora* $\mathbf{G}/\simeq$ *è (isomorfa al)la categoria associata a* G/N.

Esempio 1.27. *La volta scorsa abbiamo notato che gli spazi topologici con funzioni continue formano una categoria, che abbiamo denotato* **Top**. *Per ogni* $X, Y \in Ob(\mathbf{Top})$*, possiamo considerare la relazione di equivalenza (*omotopia*) su* $\mathbf{Top}(X, Y)$*:*

$$f \simeq g \quad \Leftrightarrow \quad \exists \begin{array}{c} h : X \times [1,0] \to Y \\ \textit{continua} \end{array} \quad \textit{tale che} \quad \begin{array}{c} h(x,0) = f(x) \\ h(x,1) = g(x) \end{array} \quad \forall\, x \in X.$$

Si può facilmente verificare che questa è una congruenza su **Top**. La categortia quoziente $\mathbf{hTop} := \mathbf{Top}/\simeq$ è detta *categoria omotopica.*

1.2.5. *Categoria delle frecce.* Sia $\mathbf{C}$ una categoria.

Definizione 1.28. *Siano* $A, B, E, F \in Ob(\mathbf{C})$ *e si considerino i morfismi* $f \in \mathbf{C}(A, B)$*,* $g \in \mathbf{C}(B, F)$*,* $h \in \mathbf{C}(A, E)$*,* $k \in \mathbf{C}(E, F)$*. Il seguente diagramma si dice* commutativo *(o* quadrato commutativo*) se* $g \circ f = k \circ h$*.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ F \arrow[r, "k"] & E \end{tikzcd}$$

Allora la categoria delle frecce $\mathbf{Arr}(\mathbf{C})$ è la categoria definita come segue:

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Arr}(\mathbf{C})) = \{f \in \mathbf{C}(A, B) \mid A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})\}$$

e, per ogni $f, g \in \mathbf{Arr}(\mathbf{C})$, un morfismo in $\mathbf{Arr}(\mathbf{C})(f, g)$ è un quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

1.2.6. *Categorie fetta e cofetta.* Sia $\mathbf{C}$ una categoria e sia $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. La categoria *fetta* (=*slice*) $\mathbf{C} \downarrow B$ è la categoria i cui oggetti sono i morfismi il cui codominio è B:

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{C} \downarrow B) = \{f \in \mathbf{C}(A, B) \mid A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})\}$$

e, per $f \in \mathbf{C}(A, B)$ e $g \in \mathbf{C}(C, B)$, i morfismi in $(\mathbf{C} \downarrow B)(f, g)$ sono triangoli commutativi:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\ & B & \end{tikzcd} \qquad h \in \mathbf{C}(A, C).$$

Per ogni $f \in \mathbf{C}(A, B)$, l'identità è

$$\mathbf{1}_f = \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\mathbf{1}_A"] \arrow[dr, "f"'] & & A \arrow[dl, "f"] \\ & B & \end{tikzcd}.$$

La composizione si ottiene componendo i triangoli commutativi.

Si può ottenere la categoria $B \uparrow \mathbf{C}$, che è ottenuta dualmente, cioè è la categoria i cui oggeti sono i morfismi il cui dominio è B, ovvero $(\mathbf{C}^{\mathrm{opp}} \downarrow B)^{\mathrm{opp}}$. Questa categoria è detta *cofetta* (=*coslice*).

Esempio 1.29. *Sia* $\{*\} \in Ob(\boldsymbol{Ins})$ *un insieme con un solo elemento. Allora* $\{*\} \uparrow \boldsymbol{Ins}$ *può essere identificata con la categoria degli insiemi puntati* $\boldsymbol{Ins}_*$*, i cui oggetti sono le coppie* (A, a) *per* $A \in Ob\mathbf{Ins}$ *e* $a \in A$ *e i cui morfismi* $f \in \mathbf{Ins}_*((A,a),(B,b))$ *sono le funzioni* $f :\to B$ *di insiemi tali che* $f(a) = b$.

1.3. **Altri morfismi.** Non tutte le categorie hanno morfismi che sono funzioni. Abbiamo già visto questo accadere nel caso della categoria associata a un preordine, ma ora vogliamo presentare altri casi.

Esempio 1.30. *Sia* k *un campo e sia* $\mathbf{Mat}_k$ *la categoria data da*

$$Ob(\mathbf{Mat}_k) = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

e, per ogni coppia $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbf{Mat}_k(n, m) = \mathbf{Mat}_{n \times m}(k).$$

La composizione è ottenuta come moltiplicazione di due matrici (righe per colonne) e l'identità $\mathbf{1}_n \in \mathbf{Mat}_k(n, n)$ *è la matrice identità (di dimensione* $n \times n$*).*

Esempio 1.31. *La categoria delle* relazioni $\mathbf{Rel}$ *è definita come segue:*

$$Ob(\mathbf{Rel}) = Ob(\mathbf{Ins})$$

e, per ogni coppia di insiemi A, B,

$$\mathbf{Rel}(A, B) = \{(A, R, B) \mid R \subseteq A \times B\}.$$

La composizione di (A, R, B) *con* (B, S, C) *è denotata* $(A, S \circ R, C)$ *e definita come segue:*

$$S \circ R = \{(a, c) \mid \exists\ b \in B \text{ tale che } (a, b) \in R \text{ e } (b, c) \in S\}.$$

Per ogni insieme A*, l'identità è* $\mathbf{1}_A = (A, \{(a, a) \mid a \in A\}, A)$.

1.4. **Funtori.** I funtori non sono altro che morfismi tra categorie, ovvero applicazioni tra collezioni di oggetti che sono compatibili con la composizione e che preservano le identità.

Definizione 1.32. *Siano* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *due categorie. Un funtore* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *è il dato di*

- *una funzione* $Ob(\mathbf{C}) \to Ob(\mathbf{D})$, $A \mapsto FA$,
- *una funzione* $\mathbf{C}(A, B) \to \mathbf{D}(FA, FB)$, $f \mapsto Ff$, *per ogni* $A, B \in Ob(\mathbf{C})$

tali che

- $F\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{FA}$ *per ogni* $A \in Ob(\mathbf{C})$,
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ *per ogni* $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathbf{C}(B, C)$, *con* $A, B, C \in Ob(\mathbf{C})$.

Esempio 1.33. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria. Allora possiamo sempre definire il funtore identità* $\mathbf{1_C} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *che manda ogni oggetto in se stesso ed ogni morfismo in se stesso.*

Date tre categorie $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ e due funtori $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$, si definisce in modo ovvio il funtore composizione $G \circ F : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$:

$$G \circ F(A) = G(F(A)), \quad \forall A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$$
$$G \circ F(f) = G(F(f)) \quad \forall\, f \in \mathbf{C}(A, B)\; A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}).$$

Esempio 1.34. *Da quanto osservato e dall'esempio precedente, vediamo che possiamo definire la (meta)categoria* $\mathbf{Cat}$ *delle categorie, i cui oggetti sono categorie e i cui morfismi sono funtori tra categorie.*

Esercizio 1.35. *Funtori preservano isomorfismi.*

A seguire, una serie di esempi di funtori che incontreremo più volte durante il corso.

Esempio 1.36.
- *Sia* $\mathbf{D}$ *una sottocategoria della categoria* $\mathbf{C}$*. Allora abbiamo il funtore inclusione* $\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *che manda ogni oggetto, rispettivamente morfismo, di* $\mathbf{D}$ *in se stesso (ma ora visto come oggetto, rispettivamente morfismo, di* $\mathbf{C}$*).*
- *Se* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *è un prodotto di categorie, allora possiamo definire due funtori di proiezione:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{C} \times \mathbf{D} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathbf{C} & & \mathbf{D} \end{tikzcd} ,$$

  dove $p_1(C, D) = C$ *per ogni* $(C, D) \in Ob(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ *e* $p_1((f, g)) = f$ *per ogni* $(f, g) \in \mathbf{C} \times \mathbf{D}((C, D), (E, F))$*. Il funtore di proiezione sulla seconda componente è definito analogamente.*
- *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria localmente piccola e sia* $\simeq$ *una congruenza su* $\mathbf{C}$*. Allora possiamo definire il funtore quoziente* $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\simeq$ *definito come segue:*

$$Ob(\mathbf{C}) \to Ob(\mathbf{C}/\simeq), \quad A \mapsto A.$$

  e

$$\mathbf{C}(A, B) \to (\mathbf{C}/\simeq)(A, B), \quad f \mapsto \overline{f}\,\textit{(classe di } f \textit{ in } \mathbf{C}(A, B)/\simeq).$$

- *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria concreta. Possiamo allora definire un funtore* dimenticante *o* oblio *(*"forgetful functor"*)* $\mathbf{C} \to \mathbf{Ins}$ *dato da*

$$Ob(\mathbf{C}) \to Ob(\mathbf{Ins}), \quad A \mapsto A \quad \begin{array}{c}\textit{(ma ci scordiamo della}\\ \textit{struttura in più di cui è dotato)}\end{array}$$

  cioè, dimentichiamo la struttura degli oggetti in $\mathbf{C}$ *e ci ricordiamo solo del fatto che sono insiemi. Lo stesso per i morfismi.*

  Un esempio di funtore dimenticante è quello che va dalla categoria dei gruppi alla categoria degli insiemi.

- *Similmente, si può definire un* funtore dimenticante/oblio *da* **Rng** *a* **Ab** *che scorda il prodotto definito sugli oggetti e mantiene la struttura additiva.*
- *Sia G un gruppo, ricordiamo che il suo commutatore G' è definito come il sottogruppo di G che è generato dagli elementi $ghg^{-1}h^{-1}$, per $g, h \in G$. È facile dimostrare che G/G' è abeliano. Possiamo allora definire un funtore $\mathbf{Gr} \to \mathbf{Ab}$ che è univocamente determinato da $Ob(\mathbf{Gr}) \to Ob(\mathbf{Ab})$, $G \mapsto G/G'$.*

Esercizio 1.37. *Trovare un esempio di un funtore $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ tale che $F(A) = A$ per ogni $A \in Ob(\mathbf{C})$ ma $F \neq \mathbf{1_C}$.*

Esercizio 1.38. *Si dimostri, o confuti tramite un controesempio, che gli oggetti e i morfismi nell'immagine di un funtore costituiscono una categoria.*

Esempio 1.39. *Il concetto di funtore nasce con la topologia algebrica, dove si vogliono descrivere proprietà geometriche tramite invarianti algebrici, in modo tale che non si abbia solo una descrizione algebrica degli spazi, ma anche delle applicazioni continue tra di essi. Ad esempio, se $\mathbf{Top}_*$ denota la categoria degli spazi topologici puntati. Per $(X, x) \in Ob(\mathbf{Top})$, denotiamo con $\pi_1(X, x)$ il gruppo fondamentale, ovvero le classi (rispetto alla relazione di equivalenza omotopica) di funzioni continue $\gamma : X \times [0, 1] \to X$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Per $(X, x), (Y, y) \in Ob(\mathbf{Top}_*)$, ogni applicazione continua $f : (X, x) \to (Y, y)$ induce un omomorfismo di gruppi:*

$$\pi_1 f : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y), \qquad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

Ricordiamo che nel corso di Geometria 3 abbiamo visto che $\pi_1(Id_X) = e_{\pi_1(X,x)}$. Inoltre, abbiamo verificato che se $f \in \mathbf{Top}_*(X, Y)$ e $g \in \mathbf{Top}_*(Y, Z)$ allora $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$. Per farla breve, π_1 è un funtore.

Esempio 1.40. *Questa è una variante dell'esempio precedente. Definiamo prima di tutto* **Grpd** *come la sottocategoria piena di* **Cat** *i cui oggetti sono i gruppoidi (cf. Definizione 1.16). Il funtore* gruppoide fondamentale *è il funtore*

$$\mathbf{Top} \to \mathbf{Grpd}$$

il cui effetto sugli oggetti è:

$$Ob(\boldsymbol{Top}) \to Ob(\boldsymbol{Grpd}), \qquad X \mapsto \mathbf{C},$$

dove $\mathbf{C}$ è il gruppoide i cui oggetti sono i punti di dello spazio topologico X e i cui morfismi sono dati da

$$\mathbf{C}(x_1, x_2) = \left\{ \gamma : X \times [0,1] \to X \;\middle|\; \begin{array}{c} \gamma \text{ è continua} \\ \gamma(0) = x_1 \ \gamma(1) = x_2 \end{array} \right\} \Big/ \simeq \qquad x_1, x_2 \in X.$$

Il simbolo $\simeq$ denota la relazione di equivalenza omotopica. Data una funzione continua tra due spazi topologici, la sua immagine tramite il funtore gruppoide fondamentale si ottiene nuovamente componendo come nell'esempio precedente.

Si noti che $\mathbf{C}(x,x) = \pi_1(X,x)$.

Esempio 1.41. *Siano* G_1, G_2 *due gruppi e siano* $\mathbf{G_1}$ *e* $\mathbf{G_2}$ *le corrispondenti categorie. Allora un funtore* $F : \mathbf{G_1} \to \mathbf{G_2}$ *è definito sugli oggetti nell'unica maniera possibile*

$$Ob(\mathbf{G_1}) = \{*\} \to Ob(\mathbf{G_2}) = \{\star\}. \qquad * \mapsto \star.$$

Affinché sia un funtore bisogna dunque avere che

$$F(gh) = F(g \circ h) = F(g) \circ F(h) = F(g)F(h) \quad \forall f, g \in \mathbf{G_1}(*,*) = G_1$$

e

$$F(e_{G_1}) = F(\mathbf{1}_*) = \mathbf{1}_\star = e_{G_2}.$$

Concludiamo che F *in questo caso è un funtore se e solo se* $F : \mathbf{G_1}(*,*) \to \mathbf{G_2}(\star\star)$ *è un omomorfismo di gruppi.*

Esercizio 1.42. *Cosa si può dire su un funtore tra due categorie associate a due insiemi con preordine?*

Esempio 1.43. *Sia* G *un gruppo (con elemento neutro* e_G*) e sia* $\mathbf{G}$ *la categoria ad esso associata.*

Mostriamo che un funtore $F : \mathbf{G} \to \mathbf{Ins}$ *non è altro che il dato di un insieme dotato di un'azione di* G. *Infatti, a livello di oggetti*

$$F : \{*\} \to Ob(\mathbf{Ins}), \qquad * \mapsto F(*)$$

e dunque stiamo scegliendo un insieme. Per quanto riguarda i morfismi, affinché F *sia un funtore, devono valere*

$$Fe_G = \mathbf{1}_{FA}$$

e, per ogni coppia di morfismi g_1, g_2 *della categoria di partenza (ovvero per ogni coppia di elementi di* G*),*

$$F(g_1g_2) = F(g_1)F(g_2) \in \mathbf{Ins}(F(*), F(*)).$$

Esempio 1.44. *Sia* $\mathbf{Euclid}_*$ *la categoria i cui oggetti sono spazi Euclidei puntati, ovvero coppie di uno spazio Euclideo e un suo punto* $(\mathbb{R}^n, x)$, *e i morfismi sono funzioni puntate differenziabili: per* $(\mathbb{R}^n, x)$, $(\mathbb{R}^m, y) \in Ob(\mathbf{Euclid}_*)$

$$\mathbf{Euclid}_*((\mathbb{R}^n, x), (\mathbb{R}^m, y)) = \left\{ f : X \to Y \mid \begin{array}{c} f(x) = y \\ f \text{ è differenziabile} \end{array} \right\}.$$

Possiamo allora definire un funtore $D : \mathbf{Euclid}_* \to \mathbf{Mat}_\mathbb{R}$ *che a livello di oggetti manda uno spazio Euclideo puntato nella sua dimensione, mentre un morfismo* $f \in \mathbf{Euclid}_*((\mathbb{R}^n, x), (\mathbb{R}^m, y))$ *è mandato nella matrice Jacobiana* $J_f(a)$ *delle derivate direzionali di* f *nel punto* x. *Il fatto che* D *sia effettivamente un funtore è dato dalla regola della catena: per ogni coppia di funzioni differenziabili* $f \in \mathbf{Euclid}_*(\mathbb{R}^n, x), (\mathbb{R}^m, y)$, $g \in \mathbf{Euclid}_*((\mathbb{R}^m, y), (\mathbb{R}^l, z))$

$$D(g \circ f) = J_{g \circ f}(x) = J_g(y) \cdot J_f(x) = D(g) \circ D(f).$$

Definizione 1.45. *Siano* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *due categorie e sia* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *un funtore.*

- *F è un* isomorfismo *di categorie se è biiettivo su oggetti e su morfismi. Equivalentemente, F è un isomorfismo se esiste un funtore $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ tale che $G \circ F = \mathbf{1_C}$ e $F \circ G = \mathbf{1_G}$. Se questo è il caso, G si dice inverso di F e si denota F^{-1}.*
- *F si dice* pieno *se per ogni $A, B \in Ob(\mathbf{C})$, la funzione $F : \mathbf{C}(A, B) \to \mathbf{D}(FA, FB)$ è suriettiva.*
- *F si dice* fedele *se per ogni $A, B \in Ob(\mathbf{C})$, la funzione $F : \mathbf{C}(A, B) \to \mathbf{D}(FA, FB)$ è iniettiva.*

Esempio 1.46.
- *La categoria cofetta $\{*\} \downarrow \mathbf{Ins}$ è isomorfa alla categoria degli insiemi puntati $\mathbf{Ins}_*$.*
- *Una sottocategoria $\mathbf{D}$ di $\mathbf{C}$ è piena se e solo se il funtore inclusione $\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ è pieno.*
- *Una categoria $\mathbf{C}$ è concreta se e solo se esiste un funtore fedele $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Ins}$.*

Esercizio 1.47. *Si trovi un esempio di una categoria $\mathbf{C}$ che è isomorfa alla sua opposta $\mathbf{C}^{opp}$. Si mostri che ciò non accade sempre.*

Esercizio 1.48. *Sia $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ und funtore pieno e fedele. Si dimostri che se FA ed FB sono isomorfi, allora $A \simeq B$.*

1.4.1. *Funtori controvarianti.*

Definizione 1.49. *Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie. Un* funtore controvariante *F da $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ è un funtore $\mathbf{C}^{opp} \to \mathbf{D}$, è cioè il dato di:*
- *un oggetto $FA \in Ob(\mathbf{D})$ per ogni $A \in Ob(\mathbf{C})$,*
- *una morfismo $Ff : FA \to FB$ per ogni morfismo $f \in \mathbf{C}(A, B)$,*

tali che
- *$F(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{FA}$ per ogni $A \in Ob(\mathbf{C})$*
- *$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ per ogni $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathbf{C}(B, C)$, $A, B, C \in \mathbf{C}$.*

Un funtore (che, dunque, non inverte l'ordine delle frecce) è detto funtore covariante.

Esempio 1.50. *Consideriamo la categoria degli spazi vettoriali $\mathbf{Vec_k}$ suun campo k. Possiamo allora definire un funtore controvariante $\cdot^* : \mathbf{Vec_k} \to \mathbf{Vec_k}$ (e cioè un funtore $\cdot^* : \mathbf{Vec_k} \to \mathbf{Vec_k}^{opp}$)come segue:*
- *$Ob(\mathbf{Vec_k}) \to Ob(\mathbf{Vec_k}^{opp})$, $V \to V^* = Hom_k(V, k)$, per ogni $V \in \mathbf{Vec_k}$.*
- *$\mathbf{Vec_k}(V, W) \to \mathbf{Vec_k}(W^*, V^*)$, dato da $f \mapsto (\psi \mapsto \psi \circ f)$, per ogni $V, W \in Ob(\mathbf{Vec_k})$.*

Esempio 1.51. *Sia $\mathbf{C}$ una categoria, allora un funtore $\mathbf{C}^{opp} \to \mathbf{Ins}$ è detto prefascio.*

Sia X uno spazio topologico. Allora l'insieme dei suoi aperti $\mathcal{A}_X$ è parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione e possiamo pertanto considerare la categoria $\mathcal{A}_\mathbf{X}$ associata a questo insieme parzialmente ordinato. Allora *un prefascio $\mathcal{A}_{\mathbf{X}}$ è quello che in geometria algebrica si chiama -neanche a farlo apposta- prefascio.*

Esempio 1.52. *Sia $\mathbf{C}$ una categoria e sia $A \in Ob(\mathbf{C})$ un suo oggetto. Possiamo definire un funtore covariante $\mathbf{C}(A, \cdot) : \mathbf{C} \to \mathbf{Ins}$, dato da:*

$$Ob(\mathbf{C}) \to Ob(\mathbf{Ins}), \quad B \mapsto \mathbf{C}(A, B)$$

e, per ogni $B, C \in Ob(\mathbf{C})$

$$\mathbf{C}(B, C) \to \mathbf{Ins}(\mathbf{C}(A, B), \mathbf{C}(A, C)), \quad f \mapsto (g \mapsto f \circ g).$$

Analogamente, otteniamo un funtore controvariante $\mathbf{C}(\cdot, A)$ per ogni oggetto $A \in Ob(\mathbf{C})$.

A volte le collezioni di morfismi possono avere della struttura in più. Ad esempio, se hanno la struttura di gruppi abeliani, otteniamo un funtore $\mathbf{C}(A, \cdot) : \mathbf{C} \to \mathbf{Ab}$.

Esempio 1.53. *Vi è un funtore controvariante* `Spec` *dalla categoria* **CRing** *degli anelli commutativi unitari alla categoria degli spazi topologici* **Top***, che a livello di oggetti manda un anello R nel suo spettro, ovvero*

$$\mathtt{Spec}(R) = \{\mathfrak{p} \subseteq R \mid \mathfrak{p} \text{ è un ideale primo}\}.$$

La struttura di spazio topologico su $\mathtt{Spec}(R)$ è ottenuta definendo come insieme di chiusi l'insieme $\{V(I) \mid I \subseteq R \text{ ideale}\}$, dove

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathtt{Spec}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Dato un morfismo $f \in \mathbf{CRing}(R, S)$, si ottiene un morfismo $\mathtt{Spec}(f) \in \mathbf{Top}(\mathtt{Spec}(S), \mathtt{Spec}(R))$ che manda un ideale primo $\mathfrak{q} \subseteq S$ nell'ideale primo $f^{-1}(\mathfrak{q})$ di R.

Esercizio 1.54. *Siano $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ due funtori. Quale relazione c'è tra la varianza di $G \circ F$, e quella di F e G?*

1.5. **Trasformazioni naturali.** Come i funtori ci permettono di mettere in relazione categorie differente, le trasformazioni naturali ci permettono di far interagire i funtori.

Definizione 1.55. *Siano $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ due categorie e siano $F, F' : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ due funtori. Una trasformazione naturale $\eta : F \to G$ è il dato di una collezione di $\mathbf{D}$-morfismi $\{\eta_A \mid A \in Ob(\mathbf{C})\}$, con $\eta_A \in \mathbf{D}(FA, F'A)$ tali che per ogni coppia di oggetti $A, B \in Ob(\mathbf{C})$ ed ogni morfismo $f \in \mathbf{C}(A, B)$ il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "Ff"] & F'A \arrow[d, "F'f"] \\ FB \arrow[r, "\eta_B"'] & F'B \end{tikzcd}$$

Osservazione 1.56. *Siano $\eta : F \to F'$, $\mu : F' \to F''$ due trasformazioni naturali. Allora se ne può definire la composizione $\mu \circ \eta : F \to F''$:*

$$(\mu \circ \eta)_A = \mu_A \circ \eta_A, \qquad \forall\ A \in Ob(\mathbf{C})$$

e anche $\mu \circ \eta$ risulta essere una trasformazione naturale.

Inoltre, dato un funtore $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, la collezione

$$(\mathbf{1}_F)_A := \mathbf{1}_{FA}, \qquad \forall\ A \in Ob\mathbf{C}$$

costituisce una trasformazione naturale.

L'osservazione precedente ci autorizza a definire la categoria funtoriale.

Definizione 1.57. *Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie. La* categoria funtoriale *$[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ è il dato di*

$$Ob([\mathbf{C}, \mathbf{D}]) = \{F : \mathbf{C} \to \mathbf{D} \mid F \text{ funtore}\},$$

$$[\mathbf{C}, \mathbf{D}](F, F') = \{\eta : F \to F' \mid \eta \text{ trasformazione naturale}\}.$$

Esercizio 1.58. *Sia $\mathbf{G}$ la categoria associata ad un gruppo G. Si dimostri che le trasformazioni naturali $\alpha : 1_{\mathbf{G}} \to 1_{\mathbf{G}}$ corrispondono agli elementi del centro del gruppo.*

Esempio 1.59. *Sia k un campo e sia $F : \mathbf{Vec_k}^{f.d.} \to \mathbf{Vec_k}^{f.d}$ il funtore indotto dalla seguente applicazione tra oggetti:*

$$Ob(\mathbf{Vec_k}^{f.d.}) \to Ob(\mathbf{Vec_k}^{f.d.}), \qquad V \mapsto Hom_k(Hom_k(V, k)) = V^{**}.$$

Possiamo allora definire una trasformazione naturale dal funtore identità $\mathbf{1}_{\mathbf{Vec_k}^{f.d.}}$ ad F come segue:

$$\eta_V : \mathbf{1}_{\mathbf{Vec_k}^{f.d.}}(V) = V \to FV = V^{**}, \qquad V \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(v)).$$

Esercizio 1.60. *Verificare che la collezione $\{\eta_A\}$ definita nel precedente esempio fornisce una trasformazione naturale (verificare cioè la commutatività richiesta dei diagrammi).*

Esempio 1.61. *Siano G, H due gruppi e siano $\varphi, \psi : G \to H$ due omomorfismi di gruppi. Come abbiamo gia osservato, li possiamo interpretare come funtori (per i quali usiamo la stessa notazione) $\varphi, \psi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$. Una trasformazione naturale $\eta : \varphi \to \psi$ è un elemento $\eta_* \in \mathbf{H}(\star, \star) = H$ tale che per ogni $g \in G$ il seguente diagramma commuti:*

$$\begin{tikzcd}
\star \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[d, "\varphi(g)"'] & \star \arrow[d, "\psi(g)"] \\
\star \arrow[r, "\eta_*"] & \star
\end{tikzcd}$$

ovvero, $\eta_*^{-1}\psi(g)\eta_* = \varphi(g)$.

Esempio 1.62. *Sia G un gruppo e $\mathbf{G}$ la corrispondente categoria.*

Vogliamo descrivere le trasformazioni naturali tra due funtori

$$F, F' : \mathbf{G} \to \mathbf{Ins}.$$

Ricordiamo che per l'esempio 1.43 ciascuno di essi è il dato di un insieme dotato di un'operazione di G.

Denotiamo $X := F(*)$ e $Y := F'(*)$. Osserviamo ora che in questo caso, una trasformazione naturale non è altro che una funzione di insiemi

$$\eta_* : X \to Y$$

tale che per ogni $g \in \mathbf{G}(*, *) = G$ il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[d, "F(g)"'] & Y \arrow[d, "F'(g)"] \\ X \arrow[r, "\eta_*"'] & Y \end{tikzcd}$$

Concludiamo che η è una trasformazione naturale tra G ed F se e solo se η_* è una funzione G-equivariante (un morfismo nella categoria dei G-insiemi).

1.6. **Equivalenze.**

Definizione 1.63. *Un* isomorfismo naturale *tra due funtori $F, F' : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è una trasformazione naturale $\eta \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}](F, F')$ tale che ogni η_A è un isomorfismo.*

Osservazione 1.64. *Se $\eta = \{\eta_A\}$ è un isomorfismo naturale, allora esiste la sua inversa ed è data da $(\eta^{-1})_A = (\eta_A)^{-1}$. Questa è una trasformazione naturale, in quanto dal fatto che η è naturale deduciamo che:*

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\eta_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

da cui segue $Gf = \eta_B \circ Ff \circ \eta_A^{-1}$, cioè $\eta_B^{-1} \circ Gf = Ff \circ \eta_A^{-1}$. Otteniamo dunque la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} GA \arrow[r, "\eta_A^{-1}"] \arrow[d, "Gf"'] & FA \arrow[d, "Ff"] \\ GB \arrow[r, "\eta_B^{-1}"'] & FB \end{tikzcd}$$

Definizione 1.65. *Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie. Allora un'*equivalenza *tra $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ è il dato di*

- *una coppia di funtori $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$;*
- *una coppia di isomorfismi naturali $\alpha : \mathbf{1_C} \to GF$ e $\beta : \mathbf{1_D} \to FG$.*

Se vi è un'equivalenza tra $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$*, allora diciamo che le due categorie sono* equivalenti *e scriviamo* $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$.

Esempio 1.66. *Sia* k *un campo. Denotiamo con* ${\mathbf{Vec_k}}^{f.d.}$ *la sottocategoria piena della categoria* $\mathbf{Vec}_k$ *i cui oggetti sono gli spazi vettoriali su* k *di dimensione finita. Allora le categorie* $\mathbf{Mat_k}$ *e* $\mathbf{Vec_k^{f.d.}}$ *sono equivalenti. Infatti:*

- *possiamo definire il funtore* $F : \mathbf{Mat_k} \to {\mathbf{Vec_k}}^{f.d.}$ *dato da*
$$F : Ob(\mathbf{Mat_k}) \to Ob({\mathbf{Vec_k}}^{f.d.}), \qquad n \mapsto k^n$$
e per ogni coppia $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} = Ob(\mathbf{Mat_k})$
$$\mathbf{Mat_k}(m, n) = Mat_{n\times m}(k) \to {\mathbf{Vec_k}}^{f.d.}(k^n, k^m), \qquad M \mapsto f_M,$$
dove f_M *è la trasformazione lineare associata alla matrice* M *rispetto alla base standard.*
- *una volta scelta una base per ogni spazio vettoriale, possiamo definire il funtore* $G : \mathbf{Vec_k^{f.d.}} \to \mathbf{Mat_k}$ *dato da*
$$G : Ob(\mathbf{Vec_k})^{f.d.} \to Ob(\mathbf{Mat_k}), \qquad V \mapsto dim_k(V)$$
e per ogni coppia $V, W \in Ob({\mathbf{Vec_k}}^{f.d.})$
$${\mathbf{Vec_k}}^{f.d.}(V, W) \to \mathbf{Mat_k}(dim_k(V), dim_k(W)), \qquad f \mapsto M_f,$$
dove M_f *è la trasformazione lineare associata alla matrice* M *rispetto alla base(per* V *e per* W*) scelta.*
- *se la base scelta per* k^n *è la base standard per ogni* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$*, allora* $GF(n) = n$ *per ogni* $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$*,* $GF(M) = M$ *per ogni* $M \in Mat_{n\times m}(k)$*, e l'isomorfismo naturale* α *è dato da* $\alpha_n = \mathbf{1}_n$ *per ogni* n*.*
- *infine, poiché* $FG(V) = k^{dim_k(V)}$*,* β_V *manda la base (ordinata) scelta per* V *nella base standard per* k^n *(e questo si vede essere compatibile con i morfismi).*

Quanto appena visto esprime l'equivalenza tra la realizzazione concreta e astratta degli oggetti incontrati in algebra lineare.

Esempio 1.67. *Vi è un'equivalenza di categorie* ${\mathbf{Vec_k}}^{f.d.} \simeq ({\mathbf{Vec_k}}^{f.d.})^{op}$*. A livello di oggetti, entrambi i funtori mandano uno spazio vettoriale nel suo duale. Il fatto che questa sia un'equivalenza si dimostra ricordando che il funtore* $\cdot^{**}$ *è una trasformazione naturale invertibile, dunque un isomorfismo naturale.*

Definizione 1.68. *Siano* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *due categorie. Allora un funtore* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *si dice* essenzialmente suriettivo sugli oggetti *se per ogni* $B \in Ob(\mathbf{D})$ *esiste un oggetto* $A \in \mathbf{C}$ *tale che* $B \simeq FA$.

Lemma 1.69. *Siano* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *due categorie e sia* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *un funtore. Allora se* F *è parte di un'equivalenza,* F *è fedele, pieno ed essenzialmente suriettivo sugli oggetti.*

Dimostrazione. Per ipotesi, F è parte di un'equivalenza, e cioè esistono un funtore $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ e due isomorfismi naturali $\alpha : \mathbf{1_C} \to GF$ e $\beta : \mathbf{1_D} \to FG$. Cominciamo dimostrando che F è fedele, ovvero che per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ si ha che $F : \mathbf{C}(A, B) \to \mathbf{D}(FA, FB)$ è iniettiva, e cioè che se $g, f \in \mathbf{C}(A, B)$ sono tali che $Ff = Fg$, deve valere $f = g$. Poiché α è una trasformazione naturale, abbiamo il seguente diagramma commutativo per ogni $h \in \mathbf{C}(A, B)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & B \arrow[d, "\alpha_B"] \\ GFA \arrow[r, "GFh"'] & GFB \end{tikzcd}$$

da cui $h = \alpha_B^{-1} \circ GFh \circ \alpha_A$. Pertanto, se $Ff = Fg$, otteniamo

$$f = \alpha_B^{-1} \circ GFh \circ \alpha_A = \alpha_B^{-1} \circ GFg \circ \alpha_A = g.$$

Per dimostrare che F è pieno bisogna far vedere che l'applicazione $F : \mathbf{C}(A, B) \to \mathbf{D}(FA, FB)$ è suriettiva per ogni $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, cioè che per ogni $h \in \mathbf{D}(FA, FB)$ esiste un morfismo $f \in \mathbf{C}(A, B)$ tale che $Ff = h$. Andiamo a far vedere che tale f è $\alpha_B^{-1} \circ Gh \circ \alpha_A$. Abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_B^{-1}Gh\alpha_A"] \arrow[d, "\alpha_A"] & B \arrow[d, "\alpha_B"] \\ GFA \arrow[r, "GF\alpha_B^{-1}Gh\alpha_A"'] & GFB \end{tikzcd},$$

pertanto $GF\alpha_B^{-1}Gh\alpha_A = \alpha_B(\alpha_B^{-1}Gh\alpha_A)\alpha^{-1} = Gh$. Poiché il ruolo di F e G é intercambiabile, dal punto precedente segue che anche G é fedele, da cui deduciamo che $F\alpha_B^{-1}Gh\alpha_A = h$, come si voleva.

Non ci rimane da dimostrare che F è essenzialmente suriettivo sugli oggetti, cioè che per ogni $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ esiste un $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ tale che $B \cong FA$. Ma poichè per ipotesi $\beta_B : B \overset{\simeq}{\to} FGB$, possiamo semplicemente prendere $A = GB$. □

Il seguente lemma ci dice che se abbiamo a che fare con categorie piccole è sufficiente trovare un funtore $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ fedele, pieno ed essenzialmente suriettivo tra due categorie per avere un'equivalenza tra le due categorie in questione.

Lemma 1.70. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria piccola e* $\mathbf{D}$ *una categoria localmente piccola. Sia* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *un funtore fedele, pieno ed essenzialmente suriettivo sugli oggetti. Allora* F *è parte di un'equivalenza tra* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$*.*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che esistono un funtore $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ e due isomorfismi naturali $\alpha : \mathbf{1_C} \to GF$ e $\beta : \mathbf{1_D} \to FG$.

Per prima cosa, definiamo $G : \mathrm{Ob}(\mathbf{D}) \to \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Siano $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ allora poiché F è essenzialmente suriettivo sugli oggetti posso scegliere (qui stiamo applicando l'assioma della scelta) un oggetto $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ tale che $C \simeq FA$ e con esso posso anche scegliere un isomorfismo β_C tra di essi: $\beta_C : C \overset{\simeq}{\to} FA$. Poniamo $GC := A$.

Siano ora $C, D \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ e sia $h \in \mathbf{D}(C, D)$. Allora abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta_C"] & D \arrow[d, "\beta_D"] \\ FGC \arrow[r, "\beta_D h \beta_C^{-1}"'] & FGD \end{tikzcd}$$

Poiché F è pieno e fedele, abbiamo una biezione tra $\mathbf{C}(GC, GD)$ e $\mathbf{D}(FGC, FGD)$ e pertanto esiste ed è unica $f \in \mathbf{C}(GC, GD)$ tale che $Ff = \beta_D h \beta_C^{-1}$. Poniamo $Gh := f$.

A questo punto dobbiamo verificare che effettivamente G sia un funtore.

Per prima cosa, per ogni $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\mathbf{1}_C"] \arrow[d, "\beta_C"'] & C \arrow[d, "\beta_C"'] \\ FGC \arrow[r, "\beta_C \mathbf{1}_C \beta_C^{-1}"'] & FGC \end{tikzcd}$$

e cioè $FG(\mathbf{1}_C) = \mathbf{1}_{FGC}$. Poiché F è un funtore, sappiamo già che $F\mathbf{1}_{GC} = \mathbf{1}_{FGC}$ e dalla pienezza e fedeltà di F deduciamo $G(\mathbf{1}_C) = \mathbf{1}_{GC}$.

Analogamente si dimostra che $G(g \circ h) = G(g) \circ G(h)$.

Infine, dobbiamo occuparci degli isomorfismi naturali. Vediamo immediatamente che β è per costruzione un isomorfismo naturala da $\mathbf{1_D}$ a FG. Sia ora $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. L'isomorfismo β_{FA} appartiene a $\mathbf{D}(FA, FGFA)$ e poiché F è pieno e fedele esiste ed è unico $f \in \mathbf{C}(A, GFA)$ tale che $Ff = \beta_{FA}$. Definiamo $\alpha_A := f$. Poiché $\beta_{FA} : FA \to FGFA$ è un isomorfismo, esiste $\beta_{FA}^{-1} \in \mathbf{D}(FGFA, FA)$ e (nuovamente perché F è pieno e fedele) un unico $\gamma \in \mathbf{C}(GFA, A)$ tale che $F\gamma = \beta_{FA}^{-1}$. Pertanto

$$\mathbf{1}_{FA} = \beta_{FA}^{-1} \circ \beta_{FA} = F(\gamma \circ \alpha_A),$$

ma d'altronde F è un funtore e quindi $F(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{FA}$, che poiché F è fedele e pieno implica $\mathbf{1}_A = \gamma \circ \alpha_A$ e, analogamente, $\mathbf{1}_{GFA} = \alpha_A \circ \gamma$. Infine, per costruzione il seguente diagramma commuta per ogni $f \in \mathbf{C}(A, B)$ ed ogni $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & B \arrow[d, "\alpha_B"] \\ GFA \arrow[r, "GFf"'] & GFB \end{tikzcd}$$

□

1.7. **Funtori rappresentabili.** Sia $\mathbf{C}$ una categoria localmente piccola. Allora per ogni oggetto $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ abbiamo definito il funtore $\mathbf{C}(A, \cdot) : \mathbf{C} \to \mathbf{Ins}$.

Definizione 1.71. *Sia $\mathbf{C}$ localmente piccola. L'*immersione di Yoneda *è un funtore controvariante da $\mathbf{C}$ a $[\mathbf{C}, \mathbf{Ins}]$, cioè un funtore $Y : \mathbf{C}^{opp} \to [\mathbf{C}, \mathbf{Ins}]$ definito come segue:*

$$Ob(\mathbf{C}) = Ob(\mathbf{C}^{opp}) \to Ob([\mathbf{C}, Ins]), \qquad A \mapsto \mathbf{C}(A, \cdot)$$

e, per ogni $A, B \in Ob(\mathbf{C}^{opp})$

$$\mathbf{C}^{opp}(B, A) = \mathbf{C}(A, B) \to [\mathbf{C}, \mathbf{Ins}](\mathbf{C}(B, \cdot), \mathbf{C}(A, \cdot)), \qquad f \mapsto ((Yf)_C)$$

dove

$$(Yf)_C : \mathbf{C}(B, C) \to \mathbf{C}(A, C), \quad h \mapsto h \circ f.$$

Dobbiamo verificare che la definizione appena data sia ben posta, cioè che $((Yf)_C)$ sia una trasformazione naturale e che Y sia un funtore. In entrambi i casi si tratta di verificare la commutatività degli opportuni diagrammi.

Siano dunque $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ ed $f \in \mathbf{C}(A, B) = \mathbf{C}^{\mathrm{opp}}(B, A)$. Per ogni $g \in \mathbf{C}(C, D) = \mathbf{C}^{\mathrm{opp}}(D, C)$ abbiamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(B,C) \arrow[r, "\cdot \circ f"] \arrow[d, "g \circ \cdot"'] & \mathbf{C}(A,C) \arrow[d, "g \circ \cdot"] \\
\mathbf{C}(B,D) \arrow[r, "\cdot \circ f"] & \mathbf{C}(A,D)
\end{tikzcd}$$

Tale diagramma è commutativo, poiché per definizione di categoria sappiamo che i $\mathbf{C}$-morfismi soddisfano l'associatività: per ogni $h \in \mathbf{C}(B, C)$ abbiamo $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$. Abbiamo così dimostrato che Yf è una trasformazione naturale.

Ci rimane da verificare che $Y(fg) = Y(f) \circ Y(g)$ per ogni $f \in \mathbf{C}^{\mathrm{opp}}(B, A) = \mathbf{C}(A, B)$ e $g \in \mathbf{C}^{\mathrm{opp}}(C, B) = \mathbf{C}(B, C)$, dove $fg \in \mathbf{C}^{\mathrm{opp}}(C, A) = \mathbf{C}(A, C)$ (ricordiamo che se $\circ$ denota la legge di composizione in $\mathbf{C}$, allora $fg = g \circ f$). La compatibilità con la legge di composizione segue nuovamente dall'associatività dei morfismi in $\mathbf{C}$, ovvero dal fatto che per ogni $D \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ ed ogni $h \in \mathbf{C}(C, D)$

$$(Yfg)_D(h) = h \circ (fg) = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f) = Yf_D(Yg_D(h)).$$

Un'importante proprietà del funtore $\mathbf{C}(A, \cdot)$ è che per ogni funtore $F \in \mathrm{Ob}([\mathbf{C}, \mathbf{Ins}])$, per ogni trasformazione naturale $\eta \in [\mathbf{C}, \mathbf{Ins}](\mathbf{C}(A, \cdot), F)$ e per ogni $f \in \mathbf{C}(A, B)$, il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(A,A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f \circ \cdot"'] & FA \arrow[d, "Ff"] \\
\mathbf{C}(A,B) \arrow[r, "\eta_B"'] & FB
\end{tikzcd} \quad .$$

In particolare, $\eta_B(f \circ \mathbf{1}_A) = \eta_B(f) = Ff \circ \eta_A(\mathbf{1}_A)$, che ci dice che $\eta_B(f)$ è univocamente determinata da $\eta_A(\mathbf{1}_A)$. Questo fatto è centrale nella dimostrazione del Lemma di Yoneda.

Prima di enunciare e dimostrare il lemma di Yoneda, ne discutiamo un esempio.

Esempio 1.72. *Sia G un gruppo (con elemento neutro e_G) e sia $\mathbf{G}$ la categoria ad esso associata.*

Abbiamo visto nell'Esempio 1.43 che un funtore $F : \mathbf{G} \to \mathbf{Ins}$ non è altro che il dato di un insieme dotato di un'azione di G. Abbiamo inoltre mostrato nell'Esempio 1.62 che una trasformazione naturale tra due funtori $F, F' : \mathbf{G} \to \mathbf{Ins}$ è il dato di una funzione tra i due G-insiemi $F(*)$ ed $F'(*)$ che commuta con l'operazione di G (indotta da F ed F').

Notiamo che possiamo considerare G stesso come un G-insieme tramite moltiplicazione sinistra di G su se stesso. Poiché una trasformazione naturale η da G ad un altro funtore $F : \mathbf{G} \to \mathbf{Ins}$ per quanto visto sopra equivale ad una funzione G-equivariante, essa è univocamente determinata da $\eta_*(e_g)$. D'altronde, non abbiamo alcuna restrizione su $\eta_*(e_G)$ che pertanto può essere un qualunque elemento di $F(*)$. Concludiamo che vi è una biiezione

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{trasformazioni naturali} \\ G \Rightarrow F \end{array} \right\} \leftrightarrow F(*), \qquad \eta \mapsto \eta_*(e_G) \ ).$$

Abbiamo appena visto che le trasformazioni naturali dal funtore G al funtore F sono parametrizzate dagli elementi di FA. Tale parametrizzazione è esplicita. Questo esempio non è che un caso particolare del Lemma di Yoneda.

Il seguente teorema, noto con il nome di *Lemma di Yoneda*, è un risultato centrale in teoria delle categorie. È normale che la prima volta che lo si vede non dica un granché, e che sembri solamente un enunciato complicato privo di significato concreto. Al contrario, esso è uno strumento importantissimo in teoria delle categorie, che appare anche in altri ambiti (ad esempio, in Geometria Algebrica, è alla base della nozione di Spazio di Moduli). Per poter apprezzare la profondità del Lemma di Yoneda vi ci vorrà del tempo, assieme a molti esempi.

Teorema 1.73 (Lemma di Yoneda)**.** *Sia $\mathbf{C}$ una categoria localmente piccola e sia $A \in Ob(\mathbf{C})$, allora vi è una biiezione*

$$\theta : [\mathbf{C}, \mathbf{Ins}](\mathbf{C}(A, \cdot), F) \to FA,$$

data da $\theta(\eta) = \eta_A(\mathbf{1}_A)$, con inversa

$$\psi : FA \to [\mathbf{C}, \mathbf{Ins}](\mathbf{C}(A, \cdot), F), \quad x \mapsto \psi(x) = (\psi(x)_B : f \mapsto Ff(x))_{B \in Ob(\mathbf{C})}.$$

Tale biezione è naturale in F e in A.

Osservazione 1.74. *Cosa vuol dire* essere naturale in F e A? *Vuol dire che*

- *per un dato A, i morfismi di insiemi θ_F, con $F \in Ob([\mathbf{C}, \mathbf{Ins}])$*
$$\theta_F : [\mathbf{C}, Ins](\mathbf{C}(A, \cdot), F) \to F(A)$$
danno una trasformazione naturale $(\theta_F)_{F \in Ob[\mathbf{C},\mathbf{Ins}]}$ tra funtori in $[[\mathbf{C}, \mathbf{Ins}], \mathbf{Ins}]$;
- *e che per un dato F, i morfismi di insiemi θ_A*
$$\theta_A : [\mathbf{C}^{opp}, Ins](\mathbf{C}(A, \cdot), F) \to F(A)$$
danno una trasformazione naturale $(\theta_A)_{Ob(\mathbf{C})}$ tra funtori in $[\mathbf{C}^{\mathbf{opp}}, \mathbf{Ins}]$.

Dimostrazione. Ricordiamo che $\theta(\eta) = \eta_A(\mathbf{1}_A)$ definisce univocamente una trasformazione naturale. Vogliamo far vedere che θ ha come inversa
$$\psi : FA \to [\mathbf{C}, \mathbf{Ins}](\mathbf{C}(A, \cdot), F), \quad x \mapsto \psi(x) = (\psi(x)_B)_{B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})},$$
dove
$$\psi(x)_B : \mathbf{C}(A, B) \to FB, \quad f \mapsto Ff(x).$$

Dobbiamo dunque far vedere che $\psi(x)$ è una trasformazione naturale, cioè che per ogni $f \in \mathbf{C}(A, B)$ ed ogni $g \in \mathbf{C}(B, C)$ il seguente diagramma commuta:
$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}(A,B) \arrow[r, "\psi(x)_B"] \arrow[d, "g\circ\cdot"'] & FB \arrow[d, "Fg"] \\ \mathbf{C}(A,C) \arrow[r, "\psi(x)_C"'] & FC \end{tikzcd},$$
ma questo segue immediatamente dal fatto che F è un funtore e dunque preserva la composizione di morfismi:
$$Fg(\psi_B(x)(f)) = Fg(Ff(x)) = F(g \circ f)(x) = \psi_B(x)(g \circ f).$$
Infine, dobbiamo verificare che effettivamente θ e ψ siano una l'inversa dell'altra: per ogni $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e per ogni $f \in \mathbf{C}(A, B)$ abbiamo
$$(\psi \circ \theta(\eta))_B(f) = \psi(\theta(\eta))(f) = Ff(\eta_A(\mathbf{1}_A)) = \eta_B(f)$$
e per ogni $x \in FA$
$$(\theta \circ \psi)(x) = \psi(x)_A(\mathbf{1}_A) = F\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_{FA}(x) = x.$$
Per quanto riguarda la naturalità, si tratta solo di verificare che gli opportuni diagrammi commutano. (verificarlo!) □

Dal Lemma di Yoneda segue facilmente il seguente corollario, che ci dice che ogni categoria localmente piccola può essere vista come una sottocategoria piena della categoria di prefasci su di essa.

Corollario 1.75. *L'immersione di Yoneda è un funtore pieno e fedele.*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che per ogni $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$,la funzione

$$Y : \mathbf{C}^{\mathrm{opp}}(A,B) = \mathbf{C}(B,A) \to [\mathbf{C},\mathbf{Ins}](YA,YB) = [\mathbf{C},\mathbf{Ins}](\mathbf{C}(A,\cdot),\mathbf{C}(B,\cdot))$$

è biunivoca, cioè che per ogni trasformazione naturale in $\eta \in [\mathbf{C},\mathbf{Ins}](YA,YB)$ esiste ed è unico un morfismo $f \in \mathbf{C}(B,A)$ tale che $Yf = \eta$. Lo dimostriamo applicando il Lemma di Yoneda nel caso $F = \mathbf{C}(B,\cdot)$. In tal caso infatti sappiamo di avere una biezione

$$\mathbf{C}(B,A) \to [\mathbf{C},\mathbf{Ins}](YA,YB) = [\mathbf{C},\mathbf{Ins}](\mathbf{C}(A,\cdot),\mathbf{C}(B,\cdot)), \quad f \mapsto \psi(f).$$

□

Esempio 1.76. *Come corollario del Lemma di Yoneda possiamo dimostrare un risultato di Algebra lineare, ovvero che le operazioni elementari*[1] *sulle righe di una matrice A di n righe sono ottenute moltiplicando A a sinistra per la matrice ottenuta eseguendo le operazioni elementari in questione sulla matrice identità $\mathbb{I}_n$.*

A tal fine, fissiamo un campo k e consideriamo la categoria $\mathbf{Mat}_k$. Consideriamo inoltre il funtore $\mathbf{Mat}_k(n,\cdot) : \mathbf{Mat}_k \to \mathbf{Ins}$. Notiamo che sui morfismi, esso è definito come:

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbf{Mat}_k(n,\cdot) & : & \mathbf{Mat}_k(m,m') & \to & \mathbf{Ins}(\mathbf{Mat}_k(n,m),\mathbf{Mat}_k(n,m')), \\ & & M & \mapsto & (A \mapsto A \cdot M). \end{array}$$

(Ovvero, la matrice $M \in Mat_{m\times m'}(k) = \mathbf{Mat}_k(m,m')$ è mandata nella funzione di insiemi che prende la matrice $A \in Mat_{n\times m}$ e la moltiplica per M a destra, ottenendo così una matrice $n\times m'$, cioè un elemento dell'insieme $Mat_{n\times m'}k = \mathbf{Mat}_k(n,m')$.)

Una collezione di funzioni di insiemi

$$(\eta_m : \mathbf{Mat}_k(n,m) = Mat_{n\times m}(k) \to Mat_{n\times m}(k) = \mathbf{Mat}_k(n,m))_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$$

è una trasformazione naturale se e solo se rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Mat}_k(n,m) & \xrightarrow{\eta_m} & \mathbf{Mat}_k(n,m) \\ {\scriptstyle \cdot M}\downarrow & & {\scriptstyle \cdot M}\downarrow \\ \mathbf{Mat}_k(n,m') & \xrightarrow{\eta_{m'}} & \mathbf{Mat}_k(n,m') \end{array}$$

per ogni $M \in Mat_{m\times m'}(k)$ e per ogni $m, m' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Ma allora se fissiamo un'operazione elementare e definiamo η come la collezione di funzioni η_m che mandano una matrice $A \in Mat_{n\times m}(k)$ nella matrice $A' \in Mat_{n\times m}(k)$ ottenuta eseguendo l'operazione elementare scelta, vediamo subito che essa (per la linearità della moltiplicazione tra matrici) rende commutativi tutti i diagrammi come sopra. Abbiamo così ottenuto una trasformazione naturale $\eta : \mathbf{Mat}_k(n,\cdot) \Rightarrow \mathbf{Mat}_k(n,\cdot)$.

[1] Per operazioni elementare intendiamo lo scambio di due righe, o la sostituzione di una riga r della matrice con la somma/differenza di tale riga con un'altra riga, o con un multiplo non nullo di r

Grazie al Lemma di Yoneda, abbiamo una biiezione esplicita:

$$\theta : [\mathbf{Mat}_k, \mathbf{Ins}](\mathbf{Mat}_k(n, \cdot), \mathbf{Mat}_k(n, \cdot)) \to \mathbf{Mat}_k(n, n),$$

data da $\eta \mapsto \eta_n(\mathbf{1}_{\mathbf{Mat}_k(n,n)})$, *dove* $\mathbf{1}_{\mathbf{Mat}_k(n,n)} = \mathbb{I}_n$ *è la matrice identità* $n \times n$. *Stiamo pertanto applicando le operazioni elementari sulle righe della matrice identità. Sia dunque* $E_\eta = \eta_n(\mathbf{1}_{\mathbf{Mat}_k(n,n)})$ *la matrice così ottenuta.*

Vogliamo descrivere η *in termini di questa matrice. A tal fine consideriamo la biiezione inversa:*

$$\psi(E_\eta) : \mathbf{Mat}_k(n, n) \to [\mathbf{Mat}_k, \mathbf{Ins}](\mathbf{Mat}_k(n, \cdot), \mathbf{Mat}_k(n, \cdot)),$$

che manda una matrice $N \in \mathbf{Mat}_k(n, n)$ *nella trasformazione naturale* $(\psi(E_\eta)_m)$, *dove*

$$\psi(E_\eta)_m : \mathbf{Mat}_k(n, m) \to \mathbf{Mat}_k(n, m),$$
$$A \mapsto (\mathbf{Mat}_k(n, \cdot)(A))(E_\eta) = E_\eta \cdot A$$

Esercizio 1.77. *(Teorema di Cayley)Sia* G *un gruppo e* $\mathbf{G}$ *la categoria ad esso associata. Usare il Lemma di Yoneda per dimostrare che vi è un omomorfismo iniettivo di gruppi* $G \to S_n$, *con* $n = \#G$.

Definizione 1.78. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria localmente piccola ed* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Ins}$, *risp.* $F : \mathbf{C}^{opp} \to \mathbf{Ins}$, *un funtore.*

- F *si dice* rappresentabile *se esiste un oggetto* $A \in Ob(\mathbf{C})$ *tale che* F *è (naturalmente) isomorfo a* $\mathbf{C}(A, \cdot)$, *risp.* $\mathbf{C}(\cdot, A)$. *In tal caso si dice che* A *rappresenta* F.
- *Una* rappresentazione *di* F *è una coppia* (A, x) *con* $A \in Ob(\mathbf{C})$, $x \in FA$ *tali che*

  $$\psi_B(x) : \mathbf{C}(A, B) \to FB, \quad f \mapsto (Ff)(x), \quad (B \in Ob(\mathbf{C})),$$

  risp.

  $$\psi_B(x) : \mathbf{C}(B, A) \to FB, \quad f \mapsto (Ff)(x), \quad (B \in Ob(\mathbf{C})),$$

  definiscono un isomorfismo naturale

  $$\psi = (\psi(x)_B)_{B \in Ob(\mathbf{C})} \in [\mathbf{C}, \mathbf{Ins}](\mathbf{C}(A, \cdot), F),$$

  risp.

  $$\psi = (\psi(x)_B)_{B \in Ob(\mathbf{C})} \in [\mathbf{C}, \mathbf{Ins}](\mathbf{C}(\cdot, A), F),$$
- *un elemento* x *come sopra viene detto* elemento universale.

Lemma 1.79. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria localmente piccola ed* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Ins}$ *un funtore. Sia* (A, x) *una rappresentazione di* F. *Allora per ogni* $B \in Ob(\mathbf{C})$ *e per ogni* $y \in FB$ *esiste un unico morfismo* $f \in \mathbf{C}(A, B)$ *tale che* $Ff(x) = y$.

Dimostrazione. Poichè (A, x) è una rappresentazione, abbiamo un isomorfismo naturale da F a $\mathbf{C}(A, \cdot)$ e sappiamo anche che è dato da $\psi(x)$. Essendo un isomorfismo, $\psi(x)_C$ è invertibile per ogni $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e quindi, in particolare è definito linverso

$$\psi(x)_B^{-1} : FB \to \mathbf{C}(A, B)$$

e pertanto vi è un unico $f \in \mathbf{C}(A,B)$ tale che $f = \psi(x)_B^{-1}(y)$, cioè $y = \psi(x)_B(f) = Ff(x)$. $\square$

Corollario 1.80. *Siano* $\mathbf{C}$ *una categoria localmente piccola e sia* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Ins}$ *un funtore. Siano* (A,x) *e* (B,y) *due rappresentazioni di* F. *Allora vi è un unico isomorfismo* $f : A \to B$ *in* $\mathbf{C}$ *tale che* $Ff(x) = y$.

Dimostrazione. Basta applicare il Lemma precedente quattro volte.

(1) (A,x) rappresentazione, pertanto vi è un unico morfismo $f \in \mathbf{C}(A,B)$ tale che $Ff(x) = y$;
(2) (B,y) rappresentazione, pertanto vi è un unico morfismo $l \in \mathbf{C}(B,A)$ tale che $Fl(y) = x$;
(3) (A,x) rappresentazione, pertanto vi è un unico morfismo $g \in \mathbf{C}(A,A)$ tale che $Fg(x) = x$, ma poiché $F\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_{FA}(x) = x$, abbiamo $g = \mathbf{1}_A$;
(4) (B,y) rappresentazione, pertanto vi è un unico morfismo $k \in \mathbf{C}(B,B)$ tale che $Fk(y) = y$, ma poiché $F\mathbf{1}_B(x) = \mathbf{1}_{FB}(x) = x$, abbiamo $g = \mathbf{1}_B$.

Da (1) e (2) deduciamo che $F(l \circ f)(x) = F(l) \circ F(f)(x) = F(l)(Ff(x)) = Fl(y) = x$, ma ora (3) implica che $l \circ f = \mathbf{1}_A$. Analogamente, da (2) e (1) deduciamo che $F(f \circ l)(y) = F(f) \circ F(l)(y) = F(f)(Fl(y)) = Ff(x) = y$, ma ora (4) implica che $f \circ l = \mathbf{1}_B$. $\square$

Esempio 1.81. *In alcuni dei seguenti esempi i funtori che consideriamo non vanno solo da* $\mathbf{C}$ *alla categoria degli insiemi, ma a volte ad altre categorie concrete. Possiamo poi comporre con il funtore dimenticante per parlare di rappresentabilità nel modo in cui è stato introdotto in queste note.*

- *Sia* k *un campo e sia* $1_k \in k$ *l'unità. Sia* $\mathbf{C} = \mathbf{Vec}_k^{f.d.}$ *e* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{Ins}$ *il funtore dimenticante. Allora* $(k, 1_k)$ *è una rappresentazione di* F.
- *Sia* $\mathbf{C} = \mathbf{Ins}$ *e sia* $n > 0$. *Sia* F *il funtore definito sugli oggetti da* $A \mapsto A^{\times n}$ *(e sui morfismi da* $f \mapsto (\underbrace{f, \dots, f}_{n})$*). Allora* F *è rappresentato da* $(\{1, 2, \dots n\}, (1, 2, \dots, n))$.
- *Sia* $\mathbf{C} = \mathbf{CRing}$ *la categoria degli anelli commutativi con unità e sia* F *il funtore definito sugli oggetti come* $R \mapsto Mat_{n\times n}(R)$. *Allora una rappresentazione di* F *è data da* $(\mathbf{Z}[x_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n], M = (x_{ij}))$.
- *Se nell'esempio precedente avessimo preso* GL_n *anziché* $Mat_{n\times n}$ *avremmo ottenuto un funtore* $F : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Gr}$. *Anch'esso è rappresentabile.*
- *Sia* $\mathbf{C} = \mathbf{Ring}$. *Otteniamo un funtore nella categoria dei gruppi come segue:*

$$Ob(\mathbf{Ring}) \to Ob(\mathbf{Gr}), \quad A \mapsto U(A) = \{a \in A \mid \exists a^{-1} \in A\}.$$

Tale funtore è rappresentabile. Una sua rappresentazione è $(\mathbf{Z}[t, t^{-1}], t)$.

Esercizio 1.82. *Verificare i dettagli di tutti gli esempi precedenti.*

1.8. **Limiti e colimiti.**

Definizione 1.83. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria.*

- *Un oggetto* $1 \in Ob(\mathbf{C})$ *è detto* finale *se per ogni oggetto* $A \in Ob(\mathbf{C})$ *vi è un unico* $\mathbf{C}$*-morfismo* $A \to 1$*, ovvero* $\#\mathbf{C}(A, 1) = 1$*.*
- *Un oggetto* $0 \in Ob(\mathbf{C})$ *è detto* iniziale *se* 0 *è finale in* $\mathbf{C}^{opp}$*. Più esplicitamente, se per ogni altro oggetto* $A \in Ob(\mathbf{C})$ *vi è un unico* $\mathbf{C}$*-morfismo* $0 \to A$*, ovvero* $\#\mathbf{C}(0, A) = 1$*.*
- *Un oggetto di* $\mathbf{C}$ *che sia al tempo stesso finale ed iniziale è detto* 0*-oggetto.*

Lemma 1.84. *Ogni oggetto finale è unico a meno di unico isomorfismo.*

Dimostrazione. Siano $1, 1' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ due oggetti finali, allora

$$\mathbf{C}(1, 1') = \{f\} \quad \text{e } \mathbf{C}('1, 1) = \{g\}$$

che ci dice

$$g \circ f \in \mathbf{C}(1, 1) \quad \text{e } f \circ g \in \mathbf{C}(1', 1').$$

Ma poiché $\mathbf{C}$ è una categoria, $\mathbf{1}_1 \in \mathbf{C}(1, 1)$ e $\mathbf{1}_{1'} \in \mathbf{C}(1', 1')$. Siccome tutte le collezioni di morfismi con codominio 1 e con codominio $1'$ consistono di un unico elemento, ne deduciamo che $g \circ f = \mathbf{1}_1$ e $f \circ g = \mathbf{1}_{1'}$. Pertanto, $1 \simeq 1'$ in $\mathbf{C}$. □

Per dualità abbiamo il seguente lemma:

Lemma 1.85. *Ogni oggetto iniziale è unico a meno di unico isomorfismo.*

Esempio 1.86.
- *Nella categoria* **Ins** *tutti gli insiemi con un solo oggetto sono finali, mentre l'insieme vuoto è iniziale. Ne deduciamo che* **Ins** *non contiene 0-oggetti.*
- *Nella categoria* **Top***, gli spazi topologici che consistono di un solo punto sono finali, mentre lo spazio topologico vuoto è un oggetto iniziale. Anche* **Top** *non ha 0-oggetti.*
- *Nella categoria* **Gr***, il gruppo banale* $\{e\}$ *è al tempo stesso finale ed iniziale, pertanto uno* 0*-oggetto.*
- *Sia* P *un insieme parzialmente ordinato e sia* $\mathbf{P}$ *la categoria ad esso associata. Allora un oggetto è finale se e solo se è massimale (dunque non esiste sempre). Analogamente, un oggetto è iniziale se e solo se è minimale.*

Esercizio 1.87. *Trovare un esempio di categoria senza oggetti iniziali né finali.*

Definizione 1.88. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e siano* $A, B \in Ob(\mathbf{C})$ *due oggetti. Un* prodotto *di* A *e* B *è il dato di* (P, π_A, π_B)*, dove*

- $P \in Ob(C)$*,*
- $\pi_A \in \mathbf{C}(P, A)$ *e* $\pi_B \in \mathbf{C}(P, B)$

tali che per ogni altra terna (C, m_A, m_B) *con* $C \in Ob(\mathbf{C})$, $m_A \in \mathbf{C}(C, A)$ *e* $m_B \in \mathbf{C}(C, B)$*, esiste un unico* f *che rende il seguente diagramma commutativo:*

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
A & & B \\
& C \arrow[ul, "m_A"] \arrow[ur, "m_B"'] \arrow[uu, "f"] &
\end{tikzcd}$$

Proposizione 1.89. *Un prodotto di* A *e* B *è unico a meno di isomorfismo unico.*

Dimostrazione. Siano (P, π_A, π_b) e (P', π'_A, π'_B) due prodotti. Allora esistono uniche $f \in \mathbf{C}(P', P)$ e $g \in \mathbf{C}(P, P')$ tali che i seguenti diagrammi siano commutativi:

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
A & & B \\
& P' \arrow[ul, "\pi'_A"] \arrow[ur, "\pi'_B"'] \arrow[uu, "f"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& P' \arrow[dl, "\pi'_A"'] \arrow[dr, "\pi'_B"] & \\
A & & B \\
& P \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] \arrow[uu, "g"] &
\end{tikzcd}$$

A questo punto notiamo che componendo f e g otteniamo altri due diagrammi commutativi

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
A & & B \\
& P \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] \arrow[uu, "g \circ f"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& P' \arrow[dl, "\pi'_A"'] \arrow[dr, "\pi'_B"] & \\
A & & B \\
& P' \arrow[ul, "\pi'_A"] \arrow[ur, "\pi'_B"'] \arrow[uu, "f \circ g"] &
\end{tikzcd}$$

D'altronde, abbiamo che anche i seguenti diagrammi commutano

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
A & & B \\
& P \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] \arrow[uu, "\mathbf{1}_P"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& P' \arrow[dl, "\pi'_A"'] \arrow[dr, "\pi'_B"] & \\
A & & B \\
& P' \arrow[ul, "\pi'_A"] \arrow[ur, "\pi'_B"'] \arrow[uu, "\mathbf{1}_{P'}"] &
\end{tikzcd}$$

A questo punto dalla definizione di prodotto abbiamo che esistono uniche $h \in \mathbf{C}(P, P)$ e $k \in \mathbf{C}(P', P-)$ che rendono commutativi i seguenti diagrammi:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\ A & & B \\ & P \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] \arrow[uu, "h"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & P' \arrow[dl, "\pi'_A"'] \arrow[dr, "\pi'_B"] & \\ A & & B \\ & P' \arrow[ul, "\pi'_A"] \arrow[ur, "\pi'_B"'] \arrow[uu, "k"] & \end{tikzcd}$$

Pertanto $\mathbf{1}_P = g \circ f$ e $\mathbf{1}_{P'} = f \circ g$ e quindi $P \simeq P'$. $\square$

Osservazione 1.90. *Il precedente risultato si sarebbe potuto anche dimostrare semplicemente osservando che il prodotto di A e B rappresenta il funtore*

$$\mathbf{C}^{opp} \to \mathbf{Ins}$$

che a livello d'oggetti è definito come

$$Ob(\mathbf{C}^{opp}) \to \mathbf{Ins}, \quad C \mapsto \mathbf{C}(C, A) \times \mathbf{C}(C, B).$$

A questo punto l'unicità segue dall'unicità delle rappresentazioni che abbiamo dimostrato la volta scorsa.

Ora possiamo parlare di il prodotto di A e B e lo denotiamo $A \times B$.

Esempio 1.91.
- *In* **Ins***, il prodotto di due insiemi è il loro prodotto Cartesiano.*
- *In* **Top** *il prodotto diretto di due spazi topologici è a livello di punti il loro prodotto e ha come topologia la topologia prodotto.*
- *In* **Gr** *il prodotto di due gruppi è il loro prodotto diretto.*

Definizione 1.92. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e siano* $A, B \in Ob(\mathbf{C})$ *due oggetti. Un* coprodotto *di A e B è il dato di (C, i_A, i_B), dove*
- $C \in Ob(C)$,
- $i_A \in \mathbf{C}(A, C)$ *e* $i_B \in \mathbf{C}(B, C)$

tali che per ogni altra terna (K, l_A, l_B) con $K \in Ob(\mathbf{C})$, $l_A \in \mathbf{C}(C, A)$ e $l_B \in \mathbf{C}(C, B)$, esiste un unico f che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & K & \\ A \arrow[ur, "l_A"] \arrow[dr, "m_A"'] & & B \arrow[ul, "l_B"'] \arrow[dl, "m_B"] \\ & C \arrow[uu, "f"] & \end{tikzcd}$$

Esempio 1.93.
- *In* **Ins***, il coprodotto di due insiemi è la loro unione disgiunta.*

- *In* **Top** *l'unione disgiunta di due spazi topologici è nuovamente uno spazio topologico. Questo è il loro coprodotto.*

Per dualità, otteniamo la seguente proposizione

Proposizione 1.94. *Un coprodotto di A e B è unico a meno di isomorfismo unico.*

Esercizio 1.95. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria con un oggetto finale* $1 \in \mathbf{C}$ *e tutti i prodotti binari (esiste cioè* $A \times B$*per ogni coppia* $A, B \in \mathbf{C}$*). Si dimostri*

- *per ogni* $A \in Ob(\mathbf{C})$ *i seguenti tre oggetti sono isomorfi:*
$$1 \times A, \quad A, \quad A \times 1,$$
- *per ogni terna* $A, B, C \in Ob(\mathbf{C})$ *si ha un isomorfismo*
$$(A \times B) \times C \simeq A \times (B \times C).$$

Definizione 1.96. *Sia* $\mathbf{J}$ *una categoria finita o piccola (o anche più generale). Un* diagramma *di forma* $\mathbf{J}$ *in* $\mathbf{C}$ *è un funtore* $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$.

Definizione 1.97. *Sia* $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ *un diagramma. Un* cono *su* D *è il dato di*

- *un oggetto* $A \in Ob(\mathbf{C})$,
- *una collezione di morfismi* $(\mu_j \mid j \in \mathbf{C}(A, D(j)))$

tali che per ogni $i, j \in Ob(\mathbf{J})$ *ed ogni* $\alpha \in \mathbf{J}(i, j)$ *il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\mu_j"'] \arrow[dr, "\mu_i"] & \\ D(j) \arrow[rr, "D(\alpha)"'] & & D(i) \end{tikzcd}$$

Osservazione 1.98. *Sia* Δ_A *il funtore* $\Delta_A : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ *definito come*
$$\Delta_A : Ob(\mathbf{J}) \to Ob(\mathbf{C}), \quad j \mapsto A,$$
e per ogni $i, j \in Ob(bJ)$
$$\Delta_A : \mathbf{J}(i, j) \to \mathbf{C}(A, A), \quad f \mapsto \mathbf{1}_A.$$
Allora un cono $(A, (\mu_j))$ *su* D *non è altro che una trasformazione naturale* $\mu : \Delta_A \to D$*, in quanto il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{tikzcd} \Delta_A(j)(A) = A \arrow[r, "\mu_j"] \arrow[d, "\mathbf{1}_A"'] & D(j) \arrow[d, "D(\alpha)"] \\ \Delta_A(j)(A) = A \arrow[r, "\mu_j"] & D(i) \end{tikzcd}$$

Come prima, sia $\mathbf{C}$ una categoria e siano $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ due suoi oggetti. Sia inoltre $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ un diagramma.

Definizione 1.99. *Siano $(A,(\mu_j))$ e $(B,(\nu_j))$ due coni sul diagramma D. Un morfismo tra essi è un morfismo $f \in \mathbf{C}$ che rende commutativo il seguente diagramma:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mu_j"'] & & B \arrow[dl, "\nu_j"] \\ & D(j) & \end{tikzcd}$$

È un'immediata verifica che morfismi tra coni soddisfano tutti gli assiomi necessari affinché si possa parlare della *categoria dei coni su D*.

Definizione 1.100. *Un* limite *di D è un oggetto finale $(L,(\lambda_j))$ nella categoria dei coni su D.*

Osservazione 1.101. *Mostriamo che il limite (analitico) di una successione decrescente di numeri reali può essere realizzato come limite di un diagramma nel senso categoriale. A tal fine, consideriamo gli insiemi parzialmente ordinati $(\mathbb{N},\geq)$ e $(\mathbb{R},\leq)$, dove $\geq$, rispettivamente $\leq$, è l'usuale relazione d'ordinamento totale su $\mathbb{N}$, rispettivamente $\mathbb{R}$ (fate attenzione che una è l'opposto dell'altra). Denotiamo le categorie associate tramite $\mathcal{N}$, rispettivamente $\mathcal{R}$. Un diagramma*

$$D : \mathcal{N} \to \mathcal{R}$$

non è altro che il dato di una funzione $D : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che

$$D(n) \leq D(n') \qquad \text{per ogni } n \geq n',$$

ovvero di una successione decrescente di numeri reali. Un cono su D è dunque dato da un $x \in \mathbb{R}$ assieme a una collezione di morfismi $\mu_n : x \to f(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ che rendono commutativi i diagrammi di Definizione 1.97. Ma per definizione di categoria associata a un insieme parzialmente ordinato, sappiamo che abbiamo al più un morfismo tra due oggetti, e che ciò avviene se essi sono in relazione. Più precisamente, affinché x sia il vertice di un cono deve valere $x \leq f(n)$ per ogni n, ovvero che x sia un minorante dell'insieme ordinato $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Osserviamo che se $\alpha \in \mathcal{N}(n,n')$, allora $D(\alpha) \in \mathcal{R}(f(n), f(n'))$, ovvero $f(n) \leq f(n')$ e necessariamente $\mu_{n'} = D(\alpha)\circ\mu_n$, pertanto la condizione sulla commutatività dei diagrammi è vuota.

Un oggetto finale in questa categoria è dunque il dato di un numero reale l tale che $l \leq f(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e tale che per ogni altro cono su D, ovvero per ogni altro minorante x della successione, si abbia esattamente un morfismo $x \to l$, ovvero $x \leq l$. Ma questo vuol dire che l è l'estremo inferiore dell'insieme $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$,ma essendo la successione decrescente questo è proprio il limite che conoscete sin dal primo corso di analisi.

Definizione 1.102.
- *Sia $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ un diagramma. Un* cocono *rispetto a D è il dato di*
  - *un oggetto $A \in Ob(\mathbf{C})$,*
  - *una collezione di morfismi $(\mu_j \mid j \in \mathbf{C}(D(j), A))$*

tali che per ogni $i, j \in Ob(\mathbf{J})$ ed ogni $\alpha \in \mathbf{J}(i,j)$ il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} & A & \\ D(j) \arrow[ur, "\mu_j"] \arrow[rr, "D(\alpha)"'] & & D(i) \arrow[ul, "\mu_i"'] \end{tikzcd}$$

- *Un* morfismo *tra i due coconi $(A, (\mu_j))$ e $(B, (\nu_j))$ è un morfismo $f \in \mathbf{C}(A, B)$ che rende commutativo il seguente diagramma per ogni $j \in Ob(\mathbf{J})$:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & D(j) \arrow[ul, "\mu_j"] \arrow[ur, "\mu_j"'] & \end{tikzcd}$$

- *Un* colimite *di D è un oggetto iniziale $(I, (\iota_j))$ nella categoria dei coconi rispetto a D.*

Proposizione 1.103. *Limiti e colimiti sono unici a meno di isomorfismo unico.*

Dimostrazione. Segue dall'unicità di oggetti finali ed iniziali. □

Il precedente risultato ci autorizza a dire "il" (co)limite di un diagramma.

Esempio 1.104.

- *(Oggetti finali come limiti) Sia $\mathbf{C}$ una categoria e consideriamo il funtore dalla categoria vuota $D : \emptyset \to \mathbf{C}$. Un cono su D è dunque il dato di un oggetto $A \in Ob(\mathbf{C})$ assieme asd una collezione vuota di morfismi, che dunque possiamo scordare. Pertanto la categoria dei coni su D in questo caso coincide con $\mathbf{C}$ e pertanto un limite di D non è altro che un oggetto finale in $\mathbf{C}$.*
- *(Prodotti come limiti) Sia $\mathbf{J}$ la categoria corrispondente al seguente grafo:*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] & & & 2 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

($\mathbf{J}$ ha cioè due oggetti e solo i due morfismi identità corrispondenti).

Sia $\mathbf{C}$ una categoria e sia $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ un funtore. Denotiamo $A := D(1)$ e $B := D(2)$. Allora un cono su D è il dato di un oggetto $C \in Ob(\mathbf{C})$ e due morfismi $\mu_1 \in \mathbf{C}(C, A)$ e $\mu_2 \in \mathbf{C}(C, B)$. Ogni coppia $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbf{C}(C, A) \times \mathbf{C}(C, B)$ va bene: non abbiamo alcuna restrizione essendo $\mathbf{J}(i, j) = \emptyset$.

Ora sia (C, μ_1, μ_2) un cono finale su D e sia (X, ν_1, ν_2) un altro cono su D. Allora per definizione di oggetto finale, esiste un unico morfismo di coni $(C, \mu_1, \mu_2) \to (X, \nu_1, \nu_2)$, e cioè un unico morfismo

$f \in \mathbf{C}(X, C)$ che rende il seguente diagramma commutativo.

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\mu_1"'] \arrow[dr, "\mu_2"] & \\
A & & B \\
 & X \arrow[ul, "\nu_1"] \arrow[ur, "\nu_2"'] \arrow[uu, "f"] &
\end{tikzcd}
$$

Concludiamo che il un limite (C, μ_1, μ_2) del diagramma D di forma $\mathbf{J}$ è un prodotto di A e B in $\mathbf{C}$.

- *(Equalizzatori) Sia $\mathbf{J}$ la categoria corrispondente al seguente grafo:*

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left] \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & 2 \arrow[loop right]
\end{tikzcd}
$$

Sia $\mathbf{C}$ una categoria e sia $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ un funtore. Denotiamo $A := D(1)$ e $B := D(2)$ e $f := D(\alpha)$ e $g := D(\beta)$.

Definizione 1.105. *Un limite del diagramma D di forma $\mathbf{J}$ si dice* equalizzatore *di f e g.*

Un cono su D è il dato di un oggetto $C \in Ob(\mathbf{C})$ e due morfismi $\mu_1 \in \mathbf{C}(C, A)$ e $\mu_2 \in \mathbf{C}(C, B)$ tali che i due seguenti diagrammi siano commutativi:

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\mu_1"'] \arrow[dr, "\mu_2"] & \\
A \arrow[rr, "f"'] & & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\mu_1"'] \arrow[dr, "\mu_2"] & \\
A \arrow[rr, "g"'] & & B
\end{tikzcd}
$$

Otteniamo pertanto la condizione

$$\mu_2 = f \circ \mu_1 = g \circ \mu_1. \tag{2}$$

Dunque μ_2 è univocamente determinato da μ_1 e possiamo scordarcene: un cono su D è pertanto in questo caso dato da un oggetto $C \in Ob(\mathbf{C})$ ed un morfismo $\mu \in \mathbf{C}(C, A)$ tale che $f \circ \mu = g \circ \mu$. Graficamente viene spesso rappresentato come

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B.
\end{tikzcd}
$$

Ora un oggetto finale nella categoria dei coni su D è una coppia (E, e) con $E \in Ob(\mathbf{C})$ e $e \in \mathbf{C}(E, A)$ tale che $f \circ e = g \circ e$ avente la proprietà che per ogni altra coppia (X, x) con $X \in Ob(\mathbf{C})$ e $x \in \mathbf{C}(X, A)$ con $f \circ e = g \circ e$ esiste un unico morfismo $h \in \mathbf{C}(X, E)$ tale *che $e \circ h = x$:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "x"] & \\ E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B. \end{tikzcd}$$

Esercizio 1.106. *Siano $G, H \in \mathbf{Grp}$ e sia $f \in \mathbf{Grp}(G, H)$. Sia inoltre $g \in \mathbf{Grp}(G, H)$ dato da*

$$g : G \to H, \quad g \mapsto e_H,$$

dove e_H è l'elemento neutro di H. Sia $\iota : Ker(f) \hookrightarrow G$ il morfismo inclusione. Si verifichi che $(Ker(f), \iota)$ è un equalizzatore di f e g.

Esempio 1.107. *Questo esempio è in realtà un lemma:*

Lemma 1.108. *Sia $\mathbf{C}$ una categoria finita o piccola (in realtà, arbitraria se definiamo un diagramma come un funtore da una categoria arbitraria). Allora $\mathbf{C}$ ha un oggetto iniziale se e solo se il funtore identità $\mathbf{1_C} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ammette un limite.*

Dimostrazione. Assumiamo prima di tutto che $\mathbf{C}$ abbia un oggetto iniziale $I \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Allora per ogni $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ vi è un unico morfismo $\lambda_A \in \mathbf{C}(I, A)$. Facciamo adesso vedere che $(I, (\lambda_A)_{A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})})$ è un limite. Per prima cosa dobbiamo dunque vedere che esso è un cono. Siano dunque $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, $f \in \mathbf{C}(A, B)$, e consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "\lambda_A"'] \arrow[dr, "\lambda_B"] & \\ A \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd}$$

Chiaramente, $f \circ \lambda_A \in \mathbf{C}(I, B)$, ma sappiamo che λ_B è l'unico $\mathbf{C}$-morfismo da I a B e pertanto $\lambda_B = f \circ \lambda_A$. Questo ci dà la commutatività del diagramma. Ora bisogna far vedere che vale la proprietà universale. Sia dunque $(K, (\mu_A))$ un altro cono su $\mathbf{1_C}$. allora per ogni $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e per ogni $f \in \mathbf{C}(A, B)$ il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "\mu_A"'] \arrow[dr, "\mu_B"] & \\ A \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd}$$

In particolare, possiamo prendere $A = I$ ed otteniamo il triangolo commutativo

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "\mu_I"'] \arrow[dr, "\mu_B"] & \\ I \arrow[rr, "\lambda_B"] & & B \end{tikzcd}$$

che ci dice che $\mu_B = \lambda_B \circ \mu_A$ per ogni $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Questo vuol dire che μ_I è un morfismo di coni. Sia adesso ν un altro morfismo di coni. Il seguente diagramma deve commutare

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\nu"] \arrow[dr, "\mu_I"'] & & I \arrow[dl, "\lambda_I"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

e cioè abbiamo che $\mu_I = \lambda_I \circ \nu$. ma poiché I è iniziale e $\mathbf{1}_I \in \mathbf{C}(I, I)$, deve essere $\lambda_I = \mathbf{1}_I$ e quindi $\mu_I = \nu$. Questo ci dà l'unicità.

Viceversa, supponiamo adesso che $\mathbf{1_C} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ammetta un limite $(L, (\lambda_A))$. Faremo vedere che L è un oggetto iniziale. Per definizione di limite abbiamo che $\lambda_A \in \mathbf{C}(L, A)$ e per concludere dobbiamo quindi dimostrare che tale morfismo è unico. Sia $f \in \mathbf{C}(L, A)$. Poiché $(L, (\lambda_A))$ è un cono, abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\lambda_L"'] \arrow[dr, "\lambda_A"] & \\ L \arrow[rr, "f"] & & A \end{tikzcd}$$

che si dice $\lambda_A = f \circ \lambda_L$. Dunque la tesi segue una volta dimostrato che $\lambda_L = \mathbf{1}_L$. Prendiamo dunque $f = \lambda_A$ per ottenere il triangolo commutativo

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\lambda_L"'] \arrow[dr, "\lambda_A"] & \\ L \arrow[rr, "\lambda_A"] & & A \end{tikzcd}$$

ne deduciamo che $\lambda_A = \lambda_A \circ \lambda_L$ per ogni $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Otteniamo dunque un morfismo di coni λ_L poiché il seguente triangolo commuta per ogni $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\lambda_L"] \arrow[dr, "\lambda_A"'] & & L \arrow[dl, "\lambda_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Ma $(L, (\lambda_A))$ è un oggetto finale e pertanto vi è un solo morfismo da $(L :, (\lambda_A)) \to (L, \lambda_A)$ e quindi $\lambda_L = \mathbf{1}_L$. □

Esempio 1.109. *(Prodotti fibrati)Sia* $\mathbf{J}$ *la categoria associata al grafo*

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[loop right] \arrow[d, "\alpha"] \\ 2 \arrow[loop left] \arrow[r, "\beta"'] & 3 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Sia $\mathbf{C}$ *una categoria e* $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ *un diagramma. Denotiamo* $A := D(1)$, $B := D(2)$, $C := D(3)$, $f := D(\alpha)$ *e* $g := D(\beta)$.

Un (il) limite di D si chiama prodotto fibrato *e si denota $A \times_C B$.*

Un cono su D è il dato di $(X, (\mu_1, \mu_2, \mu_3))$, dove $X \in Ob(\mathbf{C})$ e $\mu_i \in \mathbf{C}(X, D(i))$ per $i = 1, 2, 3$ tali che il seguente diagramma commuta (compresi i due triangoli interni):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "\mu_2"'] \arrow[dr, "\mu_3"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Notiamo che la commutatività del diagramma implica in particolare che $\mu_3 = f \circ \mu_1 = g \circ \mu_2$ e pertanto μ_3 è univocamente determinato da μ_1 e μ_2 (essendo f e g date sin dall'inizio). Pertanto il cono è il dato di $(X, (\mu_1, \mu_2))$ con la relazione $f \circ \mu_1 = g \circ \mu_2$.

Un prodotto fibrato è per definizione un limite di D e pertanto sarà dato da $(P, (\pi_1, \pi_2))$ con $f \circ \pi_1 = g \circ \pi_2$ e tale che per ogni cono $(X, (\mu_1, \mu_2))$ come sopra esiste un unico $\psi \in \mathbf{C}(X, P)$ tale che $\mu_1 = \pi_1 \circ \psi$ e $\mu_2 = \pi_2 \circ \psi$.

La nozione duale di prodotto fibrato si chiama coprodotto fibrato.

Esercizio 1.110. *Siano $n, m \in \mathbb{Z}$. Si considerino i morfismi di gruppi abeliani*

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto n \cdot z, \qquad g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto m \cdot z$$

e si determini un prodotto fibrato (P, π_1, π_2).

Proposizione 1.111. *Ogni diagramma $D : \mathbf{J} \to \mathbf{Ins}$ ammette un limite.*

Dimostrazione. Facciamo vedere che il dato di

- $C_{*,D} := \{(*, (\mu_i)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathbf{J})}) \mid \text{ cono su } D\} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ins})$ (insieme dei coni su D di vertice $*$);
- per ogni $j \in \mathrm{Ob}(\mathbf{J})$ un morfismo $\lambda_j \in \mathbf{Ins}(C_{*,D}, D(j))$, dato da

$$(*, (\mu_i)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathbf{J})}) \mapsto \mu_j(*).$$

è un limite.

Mostriamo innanzitutto che è un cono. Siano $j, k \in \mathrm{Ob}(\mathbf{J})$ e sia $f \in \mathbf{J}(j, k)$, allora dobbiamo verificare che il seguente diagramma commuta.

$$\begin{tikzcd} & C_{*,D} \arrow[dl, "\lambda_j"'] \arrow[dr, "\lambda_k"] & \\ D(j) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(k) \end{tikzcd}$$

Sia $x := (*, (\mu_i)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathbf{J})}) \in C_{*,D}$, allora

$$(Df)(\lambda_j(x)) = (Df)(\mu_j(*)) = \mu_k(*) = \lambda_k(x),$$

dove per la seconda uguaglianza abbiamo usato il fatto che x fosse un cono.

Dobbiamo ora mostrare che è finale. Sia dunque $(K, (\nu_i)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathbf{J})})$ un cono su D. Notiamo che un morfismo di coni

$$(K, (\nu_i)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathbf{J})}) \to (C_{*,D}, (\lambda_i)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathbf{J}))}), \quad k \mapsto (*, (f_i^{(k)}))$$

deve essere tale che per ogni $i \in \mathrm{Ob}(\mathbf{J})$ il seguente triangolo commuti

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr] \arrow[dr, "\nu_i"'] & & C_{*,D} \arrow[dl, "\lambda_i"] \\ & D(i) & \end{tikzcd}$$

che equivale a dire $\nu_i(k) = f_i^{(k)}(*)$. Questo ci mostra che un morfismo esiste ed è unico, ovvero $(C_{*,D}, (\lambda_i))$ è finale. $\square$

1.8.1. *Monomorfismi ed epimorfismi.*

Definizione 1.112. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria, siano* $A, B \in Ob(\mathbf{C})$ *e sia infine* $f \in \mathbf{C}(A, B)$.

(1) f *si dice* monomorfismo *(o, equivalentemente diremo che* f è monico*) se per ogni* $Z \in Ob(\mathbf{C})$ *e per ogni* $g, h \in \mathbf{C}(Z, A)$ *tali che* $f \circ g = f \circ h$, *si ha* $g = h$.
(2) f *si dice* epimorfismo *(o, equivalentemente diremo che* f è epico*) se per ogni* $C \in Ob(\mathbf{C})$ *e per ogni* $l, k \in \mathbf{C}(B, C)$ *tali che* $l \circ f = k \circ f$, *si ha* $l = k$.

Esercizio 1.113. *Si consideri il morfismo* $j \in \mathbf{CRing}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ *dato da* $j(z) := z$ *per ogni* $z \in \mathbb{Z}$. *Si dimostri che* j *è un epimorfismo in* $\mathbf{CRing}$.

Lemma 1.114. *Se* $f \in \mathbf{C}(A, B)$ *e* $g \in \mathbf{C}(B, A)$ *sono tali che* $g \circ f = \mathbf{1}_A$, *allora* f *è un monomorfismo e* g *è un epimorfismo.*

Dimostrazione. Siano $h_1, h_2 \in \mathbf{C}(Z, A)$ tali che $f \circ h_1 = f \circ h_2$. Allora

$$h_1 = \mathbf{1}_A \circ h_1 = g \circ f \circ h_1 = g \circ f \circ h_2 = \mathbf{1}_A \circ h_2 = h_2,$$

cioè $h_1 = h_2$, ovvero f monomorfismo.

Siano ora $k_1, k_2 \in \mathbf{C}(A, C)$ tali che $k_1 \circ g = k_2 \circ g$. Allora

$$k_1 = k_1 \circ \mathbf{1}_A = k_1 \circ g \circ f = k_2 \circ g \circ f = k_2 \circ \mathbf{1}_A = k_2,$$

cioè $k_1 = k_2$, ovvero g epimorfismo. $\square$

Definizione 1.115. *Se* $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathbf{C}(B, A)$ *sono tali che* $g \circ f = \mathbf{1}_A$, *allora diciamo che* f *(è un monomorfismo che) spezza e che* g *(è un epimorfismo che) spezza.*

Definizione 1.116. *Si dice che* $f \in \mathbf{C}(A, B)$ *è un* monomorfismo, *risp.* epimorfismo, regolare *se è l'equalizzatore, risp. coequalizzatore, di una qualche coppia di morfismi* $h, k \in \mathbf{C}(B, C)$, *risp.* $h, k \in \mathbf{C}(Z, A)$.

Esercizio 1.117. (1) *Verificare che ogni monomorfismo, risp. epimorfismo, regolare è effettivamente un monomorfismo, risp. epimorfismo.*
(2) *Verificare che ogni monomorfismo, risp. epimorfismo, che spezza è regolare.*

Proposizione 1.118. *Sia $f \in \mathbf{C}(A,B)$ un monomorfismo regolare che è anche un epimorfismo. Allora f è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Il fatto che il morfismo f sia un epimorfismo significa che per ogni $l,k \in \mathbf{C}(Z,A)$ se vale $l \circ f = k \circ f$ allora $l = k$. D'altronde, f monomorfismo regolare significa che esistono $k,h \in \mathbf{C}(B,C)$ tali che $k \circ f = h \circ f$ e con la seguente proprietà universale: per ogni $s \in \mathbf{C}(X,B)$ tale che $k \circ s = h \circ s$ esiste un morfismo $s' \in \mathbf{C}(X,A)$ tale che $s = f \circ s'$. L'ipotesi di f epico implica che $k = h$.

Inoltre, scegliendo $X = B$ ed $s = \mathbf{1}_B$ troviamo che esiste un unico morfismo $s' \in \mathbf{C}(B,A)$ tale che $f \circ s' = s\mathbf{1}_B$, cioè in particolare $f \circ s' = \mathbf{1}_B$. Ma questo ci dice anche che $f \circ (s' \circ f) = \mathbf{1}_B \circ f = f \circ \mathbf{1}_A$e dato che f è monomorfismo ne segue $s' \circ f = \mathbf{1}_A$. □

Lemma 1.119. *Il morfismo $f \in \mathbf{C}(A,B)$ è monico se e solo se il seguente diagramma è un prodotto fibrato:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathbf{1}_A"] \arrow[d, "\mathbf{1}_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

(questo è equivalente ad avere un isomorfismo $A \times_B A \simeq A$).

Dimostrazione. $\Leftarrow$. Sia $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e siano $k,h \in \mathbf{C}(Y,A)$ tali che $f \circ k = f \circ h$. Allora esiste un unico $\psi \in \mathbf{C}(Y,A)$ tale che $\mathbf{1}_A \circ \psi = k$ e $\mathbf{1}_A \circ \psi = h$, ma allora $h = k$, per cui f è un monomorfismo, come si desiderava.

$\Rightarrow$. Sia $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e siano $h,k \in \mathbf{C}(Z,A)$ tale che $f \circ h = f \circ k$. Poiché f è un monomorfismo ne deduciamo che $h = k$, così esiste un unico morfismo $\psi := h = k \in \mathbf{C}(Z,A)$ tale $\mathbf{1}_A \circ \psi = \mathbf{1}_A \circ \psi$ cosicché A è prodotto fibrato. □

Esercizio 1.120. *Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie e siano $F,G \in [\mathbf{C},\mathbf{D}]$. Una trasformazione naturale $\alpha = (\alpha_A) \in [\mathbf{C},\mathbf{D}]$ è un epimorfismo se e solo se tutti gli α_A sono epimorfismi.*

1.8.2. *Proiettivi.*

Definizione 1.121. *Sia $\mathbf{C}$ una categoria.*

- *$P \in Ob(\mathbf{C})$ si dice* proiettivo *se per ogni $A,B \in Ob(\mathbf{C})$, dato un epimorfismo $f \in \mathbf{C}(A,B)$ e un morfismo $g \in \mathbf{C}(P,B)$, esiste un morfismo $h \in \mathbf{C}(P,A)$ che rende il seguente diagramma commutativo:*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

- *$I \in Ob(\mathbf{C})$è iniettivo se è proiettivo in $\mathbf{C}^{opp}$.*

Notiamo un nuovo fenomeno: una definizione data tramite una proprietà universale debole (il morfismo h esiste, ma non è necessariamente unico).

Esercizio 1.122. *Si dimostri che $P \in Ob(\mathbf{C})$è proiettivo se e solo se il funtore $\mathbf{C}(P, \cdot)$ preserva epimorfismi.*

Esempio 1.123. *Nella categoria $\mathbf{Ab}^{\mathbf{f.g.}}$ dei gruppi abeliani finitamente generati gli oggetti proiettivi sono i gruppi liberi. Infatti, supponiamo che $G = \mathbb{Z}^{\times r}$, che vi sia un epimorfismo, ovvero omomorfismo suriettivo di gruppi, $f : H \to K$ e che vi sia un omomorfismo di gruppi $g : G \to K$. Sia $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{\times r}$ (ovvero, la r-upla le cui entrate sono tutte 0, tranne la i-esima che è uguale a 1) . Allora $\{e_1, \dots, e_r\}$ generano il gruppo $\mathbb{Z}^r$ e ogni elemento in G è scritto in modo unico come $g = \sum_{i=1,..,r} a_i e_i$ (dove $a_i e_i = (0, \dots, 0, a_i, 0, \dots, 0)$ per $a_i \in \mathbb{Z}$). Per definire $h : G \to H$ tale che $f \circ h = g$ ci basta scegliere un elemento $d_i \in f^{-1}(g(e_i))$ e definire $h(\sum a_i e_i) := \sum a_i d_i$. Questo definisce un omomorfismo di gruppi con la proprietà richiesta.*

Supponiamo ora per assurdo che il sottogruppo di torsione di un proiettivo G non sia banale e che contenga, ad esempio, un sottogruppo N isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sia ora $g : \mathbb{G} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ che manda N isomorficamente in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e il resto degli elementi di G nella classe di 0 in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Prendiamo ora l'epimorfismo $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ canonico. Osserviamo che un omomorfismo $h : G \to \mathbb{Z}$ tale che $h \circ f = g$ non esiste: ogni omomorfismo di gruppi $N \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ deve essere banale, cio mandare ogni elemento in 0. Ne deduciamo che G non possa essere proiettivo.

Lemma 1.124. *Sia $\mathbf{C}$ una categoria localmente piccola e sia $A \in Ob(\mathbf{C})$. Allora il funtore di Yoneda $\mathbf{C}(A, \cdot)$ è proiettivo in $[\mathbf{C}, \mathbf{Ins}]$.*

Dimostrazione. Siano $F, G \in [\mathbf{C}, \mathbf{Ins}]$. Useremo l'esercizio 1.120, che ci dice che $\alpha \in [\mathbf{C}, \mathbf{Ins}](F, G)$ è un epimorfismo se e solo se tutti gli $\alpha_C \in \mathbf{Ins}(FC, GC)$ è epimorfismo per ogni $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Supponiamo dunque che vi sia un morfismo $\beta \in \mathbf{Ins}(\mathbf{C}(A, \cdot), G)$ e un epimorfismo $\alpha \in [\mathbf{C}, \mathbf{Ins}]$.

Il Lemma di Yoneda ci assicura che esiste un unico $y \in GA$ che corrisponde a β ($y = \beta_A(\mathbf{1}_A)$). Poiché α è un epimorfismo, $\alpha_C \in \mathbf{Ins}(FC, GC)$ deve essere un epimorfismo in $\mathbf{Ins}$, cioè una funzione suriettiva, per ogni $C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. In particolare, esiste un $x \in FA$ tale che $\alpha_A(x) = y$. Ora applichiamo nuovamente il Lemma di Yoneda per poter dire che $x \in FA$ corrisponde a una trasformazione naturale $\gamma \in [\mathbf{C}, \mathbf{Ins}](\mathbf{C}(A, \cdot), F)$, la quale rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{C}(A,\cdot) \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "\beta"] \\ F \arrow[r, "\alpha"'] & G \end{tikzcd}$$

□

1.9. **Aggiunzioni.**

Definizione 1.125. *Siano* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *due categorie. Un'aggiunzione è il dato di*

- *due funtori* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *e* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$*;*
- *per ogni* $A \in Ob(\mathbf{C})$ *e* $B \in Ob(\mathbf{C})$ *biiezioni* $\varphi_{A,B} : \mathbf{D}(FA, B) \to \mathbf{C}(A, GB)$ *tali che*
  - $(\varphi_{A,B})_{B \in Ob(\mathbf{D})}$ *è una trasformazione naturale* $\mathbf{D}(FA, \cdot) \Rightarrow \mathbf{C}(A, G\cdot)$*, ovvero per ogni* $B, B' \in Ob(\mathbf{D})$ *ed ogni* $f \in \mathbf{D}(B, B')$ *il seguente quadrato sia commutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D}(FA,B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "f\circ -"'] & \mathbf{C}(A,GB) \arrow[d, "Gf\circ -"] \\
\mathbf{D}(FA,B') \arrow[r, "\varphi_{A,B'}"] & \mathbf{C}(A,GB')
\end{tikzcd}$$

  - $(\varphi^{-1}_{A,B})_{A \in Ob(\mathbf{C})}$ *è una trasformazione naturale (tra funtori controvarianti)* $\mathbf{C}(\cdot, GB) \Rightarrow \mathbf{D}(F\cdot, B)$*, ovvero per ogni* $A, A' \in Ob(\mathbf{C})$ *ed ogni* $f \in \mathbf{C}(A, A')$ *il seguente quadrato sia commutativo*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(A',GB) \arrow[r, "\varphi^{-1}_{A',B}"] \arrow[d, "-\circ f"'] & \mathbf{D}(FA',B) \arrow[d, "-\circ Ff"] \\
\mathbf{C}(A,GB) \arrow[r, "\varphi^{-1}_{A,B}"] & \mathbf{D}(FA,B)
\end{tikzcd}$$

Se tale aggiunzione esiste, allora diciamo che F *è l'aggiunto sinistro di* G *e* G *è l'aggiunto destro di* F*.*

Esempio 1.126. *Sia* $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ins}$ *il funtore dimenticante dalla categoria degli spazi topologici alla categoria degli insiemi. Tale funtore ammette un aggiunto sinistro e destro.*

- *Sia* $D : \mathbf{Ins} \to \mathbf{Top}$ *il funtore che manda un insieme* X *nello spazio topologico dato da* X *con la topologia discreta. Poiché ogni punto (e dunque ogni sottoinsieme) di* X *è aperto in questa topologia, per ogni* $Y \in Ob(\mathbf{Top})$*, ogni funzione tra gli insiemi* X *e* $U(Y)$ *è anche una funzione continua tra gli spazi topologici* $D(X)$ *e* Y*. Ne deduciamo che*
$$\mathbf{Ins}(D(X), Y) \to \mathbf{Top}(X, U(Y))$$
è una biezione
- *Sia* $B : \mathbf{Ins} \to \mathbf{Top}$ *il funtore che manda un insieme* X *nello spazio topologico dato da* X *con topologia banale (e dunque* X *e* $\emptyset$ *sono gli unici due aperti). Allora per ogni spazio topologico* Y*, ogni funzione tra gli insiemi* $U(Y)$ *e* X *è anche una funzione continua tra gli spazi topologici* Y *e* $B(X)$*, ovvero*
$$\mathbf{Ins}(Y, B(X)) \to \mathbf{Top}(U(Y), X)$$

è una biezione.

Esempio 1.127. *Siano $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ due insiemi parzialmente ordinati e siano $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ le corrispondenti categorie. Un funtore $\mathbb{P}_i \to \mathbb{P}_j$ ($i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$) non è altro che un morfismo di insiemi parzialmente ordinati, ovvero $H : P_i \to P_j$ tale che se $a \leq_1 b$ allora $H(a) \leq_2 H(b)$. Ma allora un'aggiunzione è una coppia di morfismi tra insiemi parzialmente ordinati $F : P_1 \to P_2$ e $G : P_2 \to P_1$ tali che per ogni $a \in P_1$ e $b \in P_2$ vale*

$$\mathbb{P}_2(Fa, b) \leftrightarrow \mathbb{P}_1(a, Gb)$$

ovvero $Fa \leq_2 b$ se e solo se $a \leq Gb$.

Esempio 1.128. *Questo esempio è per rispondere ad una domanda di Andrea Minosse, ovvero se la terminologia* aggiunto *avesse qualcosa a che fare con la nozione di operatore aggiunto che conosciamo da altri corsi.*

Prima di tutto osserviamo che possiamo costruire una categoria a partire da uno spazio vettoriale U sul campo k dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_U : U \times U \to k$: la categoria $\mathbb{U}$ associata a $(U, \langle , \rangle_U)$ ha dunque come oggetti gli elementi di U e, dato due vettori u, v la corrispondente collezione di morfismi consiste sempre di un'unica freccia data dal valore del prodotto scalare, ovvero $\mathbb{U}(u, v) = \{\langle u, v \rangle_U\}$. È immediato vedere che tutti gli assiomi di categoria valgono.

Siano V, W due spazi vettoriali sui un campo k e assumiamo che siano dotati entrambi di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \to k$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W : W \times W \to k$. In questo caso una coppia di funtori aggiunti non è altro che una coppia di funzioni (di insiemi) $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ e $G : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ tali che per ogni $v \in \mathcal{O}b(\mathbb{V})$ e per ogni $w \in \mathcal{O}b(\mathbb{W})$ vi siano biiezioni

$$\mathbb{W}(Fv, w) \leftrightarrow \mathbb{V}(v, Gw).$$

Questo equivale a richiedere una biiezione tra $\{\langle Fv, w \rangle_W\}$ e $\{\langle v, Gw \rangle_V\}$. Notiamo che banalmente questo avviene sempre, però, nel caso in cui F e G siano omomorfismi di spazi vettoriali e la biiezione non sia solo formale ma sia un'identità in k (cioè $\langle Fv, w \rangle_W = \langle v, Gw \rangle_V$) ritroviamo la nozione di operatori lineari aggiunti.

1.9.1. *Unità e counità.* Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie e sia

$$\left(F : \mathbf{C} \to \mathbf{D},\ G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}, (\varphi_{A,B} : \mathbf{D}(FA, B) \xrightarrow{1-1} \mathbf{C}(A, GB))_{\substack{A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \\ B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})}} \right)$$

un'aggiunzione tra di esse.

Ricordiamo che $\varphi_{A,B}$ è una biezione naturale in A e B. Questo equivale a chiedere che i seguenti diagrammi commutino

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "g"'] & \mathbf{D}(FA, B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "g\circ\cdot"'] & \mathbf{C}(A, GB) \arrow[d, "Gg\circ\cdot"] \\ B' & \mathbf{D}(FA, B') \arrow[r, "\varphi_{A,B'}"'] & \mathbf{C}(A, GB') \end{tikzcd} \tag{3}$$

$$
\begin{tikzcd}
A' & \mathbf{C}(A',GB) \arrow[r, "\varphi^{-1}_{A',B}"] \arrow[d, "\cdot\circ f"'] & \mathbf{D}(FA',B) \arrow[d, "\cdot\circ Ff"] \\
A \arrow[u, "f"] & \mathbf{C}(A,GB) \arrow[r, "\varphi^{-1}_{A,B}"'] & \mathbf{D}(A,GB)
\end{tikzcd} \tag{4}
$$

Ovvero, $(\varphi_{A,B})_{B\in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})}$ è una trasformazione naturale da $\mathbf{D}(FA,\cdot) \to \mathbf{C}(A,G\cdot)$, e $(\varphi^{-1}_{A,B})_{A\in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})}$ è una trasformazione naturale da $\mathbf{C}(\cdot,GB) \to \mathbf{D}(F\cdot,B)$.

Per ogni $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e per ogni $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$, denotiamo

$$\eta_A := \varphi_{A,FA}(\mathbf{1}_{FA}) \in \mathbf{C}(A,GFA), \quad \epsilon_B := \varphi^{-1}_{GB,B}(\mathbf{1}_{GB}) \in \mathbf{D}(FGB,B).$$

Inoltre, poiché abbiamo a che fare con trasformazioni naturali da un funtore di tipo *Hom*, esse sono determinate univocamente dal loro effetto sull'identità. Più precisamente,

- per ogni $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$, e per ogni $g \in \mathbf{D}(FA,B)$, abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{D}(FA,FA) \arrow[r, "\varphi_{A,FA}"] \arrow[d, "g\circ\cdot"'] & \mathbf{C}(A,GFA) \arrow[d, "Gg\circ\cdot"] \\
\mathbf{D}(FA,B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"'] & \mathbf{C}(A,GB)
\end{tikzcd} \tag{5}
$$

  e dunque $\varphi_{A,B}(g) = Gg \circ \varphi_{A,FA}(\mathbf{1}_{FA}) = Gg \circ \eta_A$.
- per ogni $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, e per ogni $f \in \mathbf{C}(A,GB)$, abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(GB,GB) \arrow[r, "\varphi^{-1}_{GB,B}"] \arrow[d, "\cdot\circ f"'] & \mathbf{D}(FGB,B) \arrow[d, "\cdot\circ Ff"] \\
\mathbf{C}(A,GB) \arrow[r, "\varphi^{-1}_{A,B}"'] & \mathbf{D}(FA,B)
\end{tikzcd}
$$

  e dunque $\varphi^{-1}_{A,B}(f) = \varphi^{-1}_{GB,B}(\mathbf{1}_{GB}) \circ Ff = \epsilon_B \circ Ff$.

Useremo tutto ciò per dimostrare il seguente Lemma

Lemma 1.129. *La collezione $\eta = (\eta_A \mid A \in Ob(\mathbf{C}))$ costituisce una trasformazione naturale da $\mathbf{1_C}$ a GF.*

Dualmente, la collezione $\epsilon = (\epsilon_B \mid B \in Ob(\mathbf{D}))$ costituisce una trasformazione naturale da FG a $\mathbf{1_D}$.

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima affermazione e lasciamo la dimostrazione del secondo punto come esercizio.

Dobbiamo verificare che per ogni $A, A' \in \mathbf{C}$ e per ogni $a \in \mathbf{C}(A, A')$, il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "a"'] & GFA \arrow[d, "GFa"] \\ A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & GFA' \end{tikzcd}$$

ovvero che $GFa \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ a \in \mathbf{C}(A, GFA')$. Faremo vedere che

$$\varphi^{-1}_{A,FA'}(GFa \circ \eta_A) = \varphi^{-1}_{A,FA'}(\eta_{A'} \circ a) \in \mathbf{D}(FA, FA').$$

Questo è equivalente a quanto vogliamo dimostrare, poiché $\varphi_{A,FA'}$ è una biezione.

Per (5)

$$\varphi^{-1}_{A,FA'}(GFa \circ \eta_A) = \varphi^{-1}_{A,FA'}(\varphi_{A,FA'}(Fa)) = Fa.$$

D'altronde, per (4),

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}_{A,FA'}(\eta_{A'} \circ a) &= \varphi^{-1}_{A,FA'}(\varphi_{A',FA'}(\mathbf{1}_{FA'}) \circ a) \\ &= \varphi^{-1}_{A',FA'}(\varphi_{A',FA'}(\mathbf{1}_{FA'})) \circ Fa \\ &= \mathbf{1}_{FA'} \circ Fa \\ &= Fa. \end{aligned}$$

□

Esercizio 1.130. *Adattare l'argomento del primo punto del precedente Lemma per dimostrare che $\epsilon \in [\mathbf{D}, \mathbf{D}](\mathbf{1_D}, FG)$.*

Definizione 1.131.
- *La trasformazione naturale $\eta = (\eta_A)_{A \in Ob(\mathbf{C})} \in [\mathbf{C}, \mathbf{C}](\mathbf{1_C}, GF)$ è detta* unità *dell'aggiunzione.*
- *La trasformazione naturale $\epsilon = (\epsilon_B)_{B \in Ob(\mathbf{D})} \in [\mathbf{D}, \mathbf{D}](FG, \mathbf{1_D})$ è detta* counità *dell'aggiunzione.*

Il prossimo risultato ci dice che avere un'aggiunzione è equivalente ad avere due opportune trasformazioni naturali:

Teorema 1.132. *Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie localmente piccole e siano $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ una coppia di funtori. Allora specificare un'aggiunzione $(\varphi_{A,B})_{\substack{A \in Ob(\mathbf{C}) \\ B \in Ob(\mathbf{D})}}$ equivale a specificare due trasformazioni naturali $\eta : \mathbf{1_C} \to GF$ e $\epsilon : FG \to \mathbf{1_D}$ che soddisfano le seguenti identità triangolari:*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_F"'] & FGF \arrow[d, "\epsilon_F"] \\ & F \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta_G"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_G"'] & GFG \arrow[d, "G\epsilon"] \\ & G \end{tikzcd} \tag{6}$$

Dimostrazione. Assumiamo che $(F, G, (\varphi_{A,B}))$ sia un'aggiunzione. Il Lemma 1.129 ci dice che abbiamo due trasformazioni naturali $\eta : \mathbf{1_C} \to GF$ e $\epsilon : FG \to \mathbf{1_D}$ date da:

$$\eta_A := \varphi_{A,FA}(\mathbf{1}_{FA}), \quad \epsilon_B := \varphi^{-1}_{GB,B}(\mathbf{1}_{GB}).$$

Pertanto non ci rimane che verificare che le due uguaglianze triangolari valgano. A tal fine, ci ricordiamo di aver già osservato che per ogni $f \in \mathbf{C}(A, GB)$, abbiamo $\epsilon_B \circ Ff = \varphi^{-1}_{A,B}(f)$, che nel caso $B = FA$ e $f = \eta_A$ ci dice

$$\epsilon_{FA} \circ F\eta_A = \varphi^{-1}_{A,FA}(\eta_A) = \varphi^{-1}_{A,FA}(\varphi_{A,FA}(\mathbf{1}_{FA})) = \mathbf{1}_{FA} \qquad \text{per ogni } A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$$

e cioè abbiamo dimostrato che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_F"'] & FGF \arrow[d, "\epsilon_F"] \\ & F \end{tikzcd} .$$

Analogamente (**esercizio!**) si dimostra che si ha un triangolo commutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta_G"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_G"'] & GFG \arrow[d, "G\epsilon"] \\ & G \end{tikzcd} .$$

Viceversa, siano $\eta \in [\mathbf{C}, \mathbf{C}](\mathbf{1_C}, GF)$ e $\epsilon \in [\mathbf{D}, \mathbf{bD}](FG, \mathbf{1_D})$ due trasformazioni naturali che soddisfano le identità triangolari (6). Dobbiamo far vedere che questo è sufficiente per definire biiezioni

$$\varphi_{A,B} : \mathbf{D}(FA, B) \to \mathbf{C}(A, GB)$$

per ogni $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ che siano naturali in A e B. Faremo vedere che per ogni A, B la funzione

$$\varphi_{A,B}(g) := Gg \circ \eta_A \quad (g \in \mathbf{D}(FA, B))$$

è biunivoca, con inversa

$$\tilde{\varphi}_{A,B}(f) = \epsilon_B \circ Ff \quad (f \in \mathbf{C}(A, GB))$$

ed è naturale in A e B.

Per ogni $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, osserviamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "F\eta_A"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_{FA}"] & FGFA \arrow[r, "FGg"] \arrow[d, "\epsilon_{FA}"] & FGB \arrow[d, "\epsilon_B"] \\ & FA \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

poiché il triangolo e il quadrato commutano entrambi per ipotesi, l'intero trapezio commuta, dandoci

$$g = g \circ \mathbf{1}_{FA} = \epsilon_B \circ FGg \circ F\eta_A = \epsilon_B \circ F(Gg \circ \eta_A).$$

Analogamente, il seguente trapezio commuta, dato che commutano il triangolo e il quadrato che lo compongono:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_A"] & GB \arrow[d, "\eta_{GB}"'] \arrow[dr, "\mathbf{1}_{GB}"] & \\ GFA \arrow[r, "GFf"'] & GFGB \arrow[r, "G\epsilon_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

ne deduciamo che

$$f = \mathbf{1}_{GB} \circ f = G\epsilon_B \circ GFf \circ \eta_A = G(\epsilon_B \circ Ff) \circ \eta_A$$

. Pertanto

$$\varphi_{\tilde{A},B}(\varphi_{A,B}(g)) = \varphi_{\tilde{A},B}(Gg \circ \eta_A) = \epsilon_B \circ F(Gg \circ \eta_A) = g$$

e

$$\varphi_{A,B}(\varphi_{\tilde{A},B}(f)) = \varphi_{A,B}(\epsilon_B \circ Ff) = G(\epsilon_B \circ Ff) \circ \eta_A = f.$$

Il fatto che $\varphi_{A,B}$ siano naturali in A e B segue semplicemente dal fatto che F e G sono funtori e che quindi preservano le composizioni di morfismi. $\square$

Esempio 1.133. *Il funtore $ab : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Ab}$, che è definito al livello di oggetti*

$$Ob(\mathbf{Gr}) \to Ob(\mathbf{Ab}), \qquad G \mapsto G/[G,G]$$

è aggiunto sinistro del funtore inclusione $I : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Gr}$. Questo si vede osservando che per ogni gruppo $G \in Ob(\mathbf{Gr})$ ed ogni gruppo abeliano $H \in \mathbf{Ab}$, un morfismo $\psi : \mathbf{Gr}(G, I(H))$ ha la proprietà che $\psi([G,G]) \subseteq Ker(\psi)$ e pertanto esiste un unico $\bar{\psi} \in \mathbf{Ab}(ab(G), H) = \mathbf{Gr}(ab(G), H)$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "can"'] & H = I(H) \ . \\ & G/[G,G] \arrow[u, "\bar{\psi}"] \end{tikzcd}$$

Allora l'unità di questa aggiunzione è data da

$$\eta_G : G \to G/[G,G] = I(G/[G,G]) \qquad \textit{(mappa quoziente canonica)},$$

mentre la counità è data da

$$H \overset{\cong}{\leftarrow} I(H)/[I(H), I(H)] = H/[H,H] \ \textit{(isomorfismo canonico)}$$

(dovuto al fatto che per H abeliano $[H,H] = e_H$).

Esercizio 1.134. *Determinare unità e counità delle aggiunzioni dell'esempio 1.126*

1.9.2. *Equivalenze aggiunte.*

Definizione 1.135. *Un'equivalenza aggiunta è un'aggiunzione* $(F, G, (\varphi_{A,B}))$ *tra due categorie (localmente piccole) tale che unità e counità siano entrambi isomorfismi naturali.*

Ricordiamo che un'equivalenza tra le categorie $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ è il dato di due funtori $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} :\to \mathbf{C}$ e di due isomorfismi naturali $\alpha : \mathbf{1_C} \overset{\sim}{\to} GF$ e $\beta : \mathbf{1_D} \overset{\sim}{\to} FG$.

Esercizio 1.136. *Siano G e H due gruppi e denotiamo come al solito con $\mathbb{G}$ e $\mathbb{H}$ le rispettive categorie.*

- *Si descriva il dato di un'equivalenza tra $\mathbb{G}$ e $\mathbb{H}$;*
- *si dimostri che se G ha centro banale, allora ogni equivalenza da $\mathbb{G}$ a sé stesso è aggiunta;*
- *si trovino due gruppi ed un'equivalenza tra le categorie ad essi corrispondenti che non sia aggiunta.*

Il seguente risultato ci dice che ogni equivalenza produce un'equivalenza aggiunta.

Lemma 1.137. *Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie localmente piccole. E sia (F, G, α, β) un'equivalenza tra di esse. Allora esiste un'aggiunzione tra $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ avente α come unità.*

Dimostrazione. Utilizzeremo Teorema 1.132 per dimostrare la tesi, ovvero faremo vedere di avere due trasformazioni naturali opportune che soddisfano le identità trinagolari. Prima di tutto, vogliamo che l'unità sia α e dunque consideriamo $\eta = \alpha : \mathbf{1_C} \to GF$ già data. Definiamo $\epsilon : FG \to \mathbf{1_D}$ come la composizione dei seguenti tre isomorfismi naturali

$$FG \xrightarrow{\beta_{FG}} FGFG \xrightarrow{(F\alpha_G)^{-1}} FG \xrightarrow{\beta^{-1}} \mathbf{1_D}.$$

Otteniamo dunque un isomorfismo naturale ϵ e ci rimane da mostrare che le uguaglianze triangolari (6) siano verificate.

Prima di procedere, osserviamo che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1_D} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\beta"'] & FG \arrow[d, "\beta_{FG}"] \\ FG \arrow[r, "FG\beta"'] & FGFG \end{tikzcd}$$

ed essendo β un isomorfismo naturale, questo implica che $\beta_{FG} = FG\beta$.

Analogamente, la commutativitá del diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1_C} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"'] & GF \arrow[d, "\alpha_{GF}"] \\ GF \arrow[r, "GF\alpha"'] & GFGF \end{tikzcd}$$

e il fatto che α sia un isomorfismo implica che $\alpha_{GF} = GF\alpha$.

Abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\beta_F"] \arrow[d, "F\alpha"'] & FGF \arrow[d, "F\alpha_{GF}"'] \arrow[dr, "\mathbf{1}_{FGF}"] & & \\ FGF \arrow[r, "\beta_{FGF}"'] & FGFGF \arrow[r, "(F\alpha_{GF})^{-1}"'] & FGF \arrow[r, "\beta_F^{-1}"'] & F \end{tikzcd}$$

che ci dice

$$\mathbf{1}_F = \beta_F^{-1} \circ \mathbf{1}_{FGF} \circ \beta_F = (\beta_F^{-1} \circ (F\alpha_{GF})^{-1} \circ \beta_{FGF}) \circ F\alpha = \epsilon_F \circ F\eta$$

e ci dà dunque la prima uguaglianza triangolare.

La seconda segue nello stesso modo dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "G\beta"] \arrow[d, "\alpha_G"'] & GFG \arrow[d, "\alpha_{GFG}"'] \arrow[dr, "\mathbf{1}_{GFG}"] & & \\ GFG \arrow[r, "G\beta_{FG}"'] & GFGFG \arrow[r, "G(F\alpha_G)^{-1}"'] & FGF \arrow[r, "G(\beta^{-1})"'] & G \end{tikzcd}$$

che ci dice

$$\mathbf{1}_G = G(\beta^{-1}) \circ \mathbf{1}_{GFG} \circ G\beta = (G(\beta^{-1}) \circ G(F\alpha_G)^{-1} \circ G\beta_{FG}) \circ \alpha_G = G\epsilon \circ \eta_G$$

e ci dà dunque la seconda uguaglianza triangolare. □

1.9.3. *Aggiunzione tramite oggetti iniziali.*

Definizione 1.138. *Siano* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *due categorie e sia* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *un funtore. Sia inoltre* $A \in Ob(\mathbf{C})$*. La categoria* $(\mathbf{A} \downarrow \mathbf{G})$ *è la categoria avente come oggetti le coppie* (B, f)*, dove* $B \in Ob(\mathbf{D})$ *ed* $f \in \mathbf{C}(A, GB)$ *e un morfismo* $g \in (\mathbf{A} \downarrow \mathbf{G})((B, f)(B', f'))$ *consiste in un morfismo* $g \in \mathbf{D}(B, B')$ *tale che* Gg *renda commutativo il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ GB \arrow[rr, "Gg"'] & & GB' \end{tikzcd}$$

La categoria $(\mathbf{G} \downarrow \mathbf{A})$ è definita in modo analogo, invertendo tutte le frecce.

Teorema 1.139. *Siano* $\mathbf{C}$*,* $\mathbf{D}$ *due categorie localmente piccole e sia* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *un funtore. Il dato di un aggiunto sinistro* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *equivale a specificare un oggetto iniziale in* $(A \downarrow G)$ *per ogni* $A \in Ob(\mathbf{C})$*.*

Dimostrazione. Assumiamo che $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ sia un aggiunto sinistro di G. Questo vuol dire che abbiamo una collezione di biezioni

$$(\varphi_{A,B} : \mathbf{D}(FA, B) \to \mathbf{C}(A, GB))_{\substack{A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \\ B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})}}$$

che sono naturali in A e B. Pertanto possiamo considerare l'unità dell'aggiunzione $\eta = (\eta_A = \varphi_{A,FA}(\mathbf{1}_{FA}))_{A\in\mathrm{Ob}(\mathbf{C})}$. Per costruzione, $FA \in \mathbf{D}$ ed $\eta_A \in \mathbf{C}(A, GFA)$, e dunque $(FA, \eta_A) \in \mathrm{Ob}((\mathbf{A} \downarrow \mathbf{G}))$ per ogni $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Faremo vedere che (FA, η_A) è un oggetto iniziale in $(\mathbf{A} \downarrow \mathbf{G})$. Sia $(B, f) \in \mathrm{Ob}((\mathbf{A} \downarrow \mathbf{G}))$ e sia $g \in (\mathbf{A} \downarrow \mathbf{G})((FA, \eta_A), (B, f))$, cioè $g \in \mathbf{D}(FA, B)$ tale che il diagramma seguente commuti:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\ GFA \arrow[rr, "Gg"'] & & GB \end{tikzcd}$$

Ma esso commuta se e solo se commuta il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} & FA \arrow[dl, "\mathbf{1}_{FA}"'] \arrow[dr, "\varphi^{-1}_{A,B}(f)"] & \\ FA \arrow[rr, "g"'] & & B \end{tikzcd}$$

cioè $g = \varphi^{-1}_{A,B}(f)$. Questo ci dà l'unicità di g e possiamo concludere che (FA, η_A) è iniziale.

Viceversa, per ogni $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, sia dato un oggetto iniziale (B, f) in $(A \downarrow G)$. Allora definiamo $FA := B$ ed $\eta_A := f$. Dobbiamo fare vedere che questo definisce un funtore aggiunto a G.

Siano ora $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e sia $a \in \mathbf{C}(A, A')$. Dobbiamo dire chi è $F(a)$. Poiché $\eta_{A'} \circ a \in \mathbf{C}(A, GFA')$, abbiamo $(FA', \eta_{A'} \circ a) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} \downarrow \mathbf{G})$. Essendo (FA, η_A) iniziale per ipotesi, esiste un unico morfismo $g \in \mathbf{D}(FA, FA')$ tale che il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "\eta_{A'}\circ a"] & \\ GFA \arrow[rr, "Gg"'] & & GFA' \end{tikzcd}$$

Questo ci sta dicendo che è il seguente diagramma a commutare

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\eta_A"'] \arrow[dr, "\eta_{A'}\circ a"] & A' \arrow[d, "\eta_{A'}"] \\ GFA \arrow[r, "Gg"'] & GFA' \end{tikzcd}$$

A questo punto possiamo definire $F(a) := g$. L'unicità di g dà la compatibilità con la composizione dei morfismi: siano $A, A', A''\imath\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, allora se $a \in \mathbf{C}(A, A')$ e $a' \in \mathbf{C}(A', A'')$, $a' \circ a \in \mathbf{C}(A, A'')$, esistono uniche $g \in \mathbf{D}(FA, FA')$, $g' \in \mathbf{D}(FA', FA'')$ ed $h \in \mathbf{D}(FA, FA'')$ tali che i due diagrammi seguenti siano commutativi:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\eta_A"'] & A' \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "\eta_{A'}"'] & A'' \arrow[d, "\eta_{A''}"'] \\ GFA \arrow[r, "Gg"'] & GFA' \arrow[r, "Gg'"'] & GFA'' \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "a' \circ a"] \arrow[d, "\eta_A"'] & A'' \arrow[d, "\eta_{A''}"] \\ GFA \arrow[r, "Gh"'] & GFA'' \end{tikzcd}$$

L'unicità di h implica che $F(a' \circ a) = h = g' \circ g = F(a') \circ F(a)$.

Ci rimane da far vedere che F è aggiunto sinistro di G. Mostreremo che per ogni $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ abbiamo una biezione (naturale in A e B) data da

$$\varphi_{A,B}(h) = Gh \circ \eta_A \qquad (h \in \mathbf{D}(FA, B)).$$

Prima di tutto osserviamo che effettivamente $Gh \circ \eta_A \in \mathbf{C}(A, GB)$. Vogliamo adesso mostrare che ammette un inverso. Sia $k \in \mathbf{C}(A, GB)$, allora $(B, k) \in \mathrm{Ob}((\mathbf{A} \downarrow \mathbf{G}))$. Poiché (FA, η_A) è iniziale, esiste un unico $h \in \mathbf{D}(FA, B)$ tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "k"] & \\ GFA \arrow[rr, "Gh"'] & & GB \end{tikzcd}$$

Abbiamo così dimostrato che effettivamente $\varphi_{A,B}$ è una biiezione.

Per concludere dobbiamo verificare che i φ sono naturali in B e A.

Siano dunque $B, B' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ e $b \in \mathbf{D}(B, B')$. Allora vogliamo mostrare che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{D}(FA, B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "g \circ \cdot"'] & \mathbf{C}(A, GB) \arrow[d, "Gb \circ \cdot"] \\ \mathbf{D}(FA, B') \arrow[r, "\varphi_{A,B'}"'] & \mathbf{C}(A, GB') \end{tikzcd}$$

Ma questo segue immediatamente dalla funtorialità di G: per ogni $h \in \mathbf{D}(FA, B)$

$$\varphi_{A,B'}(b \circ h) = G(b \circ h) \circ \eta_A = (Gb \circ Gh) \circ \eta_A = Gb \circ (Gh \circ \eta_A) = Gb \circ \varphi_{A,B}(h).$$

Infine, siano $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, $a \in \mathbf{C}(A, A')$ e $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$. Verificare la commutatività di

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}(A', GB) \arrow[r, "\varphi^{-1}_{A',B}"] \arrow[d, "\cdot \circ a"'] & \mathbf{D}(FA', B) \arrow[d, "\cdot \circ Fa"] \\ \mathbf{C}(A, GB) \arrow[r, "\varphi^{-1}_{A,B}"'] & \mathbf{D}(FA, B) \end{tikzcd}$$

è più delicato. Sia dunque $k' \in \mathbf{C}(A', GB)$, denotiamo $k := k' \circ a \in \mathbf{C}(A, GB)$, ovvero

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "k'"] & GB \\
A \arrow[u, "a"] \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

Se denotiamo $h' := \varphi^{-1}_{A',B}(k') \in \mathbf{D}(FA', B)$ e $h := \varphi^{-1}_{A,B}(k) \in \mathbf{D}(FA, B)$, otteniamo allora il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[rr, "k'"] \arrow[dr, "\eta_{A'}"] & & GB \\
& GFA' \arrow[ur, "Gh'"] & \\
A \arrow[uu, "a"] \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "\eta_A"'] & & GB \arrow[uu, "\mathbf{1}_{GB}"'] \\
& GFA \arrow[uu, "GFa"] \arrow[ur, "Gh"'] &
\end{tikzcd}$$

Dunque abbiamo due triangoli commutativi:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "k"] & \\
GFA \arrow[rr, "Gh"] & & GB
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "k' \circ a = k"] & \\
GFA \arrow[rr, "Gh' \circ GFa"] & & GB
\end{tikzcd}$$

Poiché (FA, η_A) è iniziale, $h = h' \circ Fa$ e cioè $\varphi^{-1}_{A,B}(k) = \varphi^{-1}_{A',B}(k') \circ Fa$, come desiderato. $\square$

Esempio 1.140. *Siano* $\mathbf{J}$ *e* $\mathbf{C}$ *due categorie localmente piccole. Per ogni* $A \in Ob(\mathbf{C})$*, definiamo il funtore* $\Delta_A : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ *dato da*

$$\Delta_A(j) = A \text{ per ogni } j \in Ob(\mathbf{J}), \qquad \Delta_A(f) = \mathbf{1}_A \text{ per ogni } f \in \mathbf{J}(j, i).$$

Otteniamo dunque un funtore $\Delta : \mathbf{C} \to [\mathbf{J}, \mathbf{C}]$ *definito sugli oggetti come* $\Delta(A) = \Delta_A$ *per ogni* $A \in Ob(\mathbf{C})$.

*Utilizzando il teorema precedente, si può dimostrare (**esercizio!**) che* Δ *ammette un aggiunto sinistro se e solo se ogni diagramma* $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ *ammette un colimite.*

Corollario 1.141. *Sia* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *un funtore tra due categorie localmente piccole. Siano* $F, F' : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *due aggiunti sinistri di* G*. Allora* F *ed* F' *sono naturalmente isomorfi.*

Dimostrazione. Il precedente teorema ci dice che (FA, η_A) ed $(F'A, \eta'_A)$ sono entrambi oggetti iniziali di $(\mathbf{A} \downarrow \mathbf{G})$. Ma sappiamo che tutti gli oggetti iniziali di una categoria sono unici a meno di un unico isomorfismo. Pertanto otteniamo una collezione di isomorfismi $\alpha_A : (FA, \eta_A) \to (F'A, \eta'_A)$, ovvero isomorfismi $\alpha_A \in \mathbf{D}(FA, F'A)$ tali che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "\eta'_A"] & \\
GFA \arrow[rr, "G\alpha_A"] & & GF'A
\end{tikzcd}$$

Per concludere dobbiamo dimostrare che $\alpha = (\alpha_A)$ è effettivamente una trasformazione naturale, ovvero che per ogni $a \in \mathbf{C}(A, A')$ il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Fa"'] & F'A \arrow[d, "F'a"] \\
FA' \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & F'A'
\end{tikzcd}$$

e cioè che $F'a \circ \alpha_A = \alpha_{A'} \circ Fa$. Per farlo consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& & A \arrow[ddll, "\eta_{A'} \circ a"'] \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "\eta'_A"] \arrow[ddrr, "\eta'_{A'} \circ f"] & & \\
& GFA \arrow[rr, "G\alpha_A"'] \arrow[dl, "GFa"] & & GF'A \arrow[dr, "GF'a"'] & \\
GFA' \arrow[rrrr, "G\alpha_{A'}"'] & & & & GF'A'
\end{tikzcd}$$

dove tutti i triangoli sono commutativi. Otteniamo in particolare i due seguenti triangoli commutativi:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "\eta'_{A'} \circ a"] & \\
GFA \arrow[rr, "G\alpha_{A'} \circ GFa"'] & & GF'A'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "\eta'_{A'} \circ a"] & \\
GFA \arrow[rr, "GF'a \circ G\alpha_A"'] & & GF'A'
\end{tikzcd}$$

Ne segue che $\alpha_{A'} \circ Fa, F'a \circ \alpha_A \in (\mathbf{A} \downarrow \mathbf{G})((FA, \eta_A), (F'A', \eta'_{A'} \circ a))$. Poiché (FA, η_A) è iniziale, i due morfismi devono coincidere. $\square$

Abbiamo visto che specificare un'aggiunzione $(F, G(\varphi_{A,B}))$ è equivalente a specificare due opportune trasformazioni naturali o specificare un oggetto iniziale per ogni $(A \downarrow G)$. Una terzo, equivalente, criterio affinché G abbia un aggiunto sinistro riguarda l'esistenza dei limiti.

Teorema 1.142. *Siano $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ due categorie localmente piccole e sia $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ un funtore che ammette un aggiunto sinistro. Allora G preserva tutti i limiti che esistono in $\mathbf{D}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{J}$ una categoria localmente piccola e $D : \mathbf{J} \to \mathbf{D}$ un diagramma che ammette un limite. Vogliamo mostrare che esiste un oggetto finale nella categoria dei coni su GD.

Gli oggetti di questa categoria sono $(A, (\mu_j : A \to GD(j))_{j \in \mathrm{Ob}(\mathbf{J})})$, dove $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e i μ_j sono tali che, per ogni $\alpha \in \mathbf{J}(j,i)$, il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\mu_j"'] \arrow[dr, "\mu_i"] & \\ GD(j) \arrow[rr, "GD\alpha"'] & & GD(i) \end{tikzcd}$$

Ma tale diagramma commuta se e solo se il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} & FA \arrow[dl, "\varphi^{-1}_{a,D(j)}(\mu_j)"'] \arrow[dr, "\varphi^{-1}_{A,D(i)}(\mu_i)"] & \\ D(j) \arrow[rr, "D\alpha"'] & & D(i) \end{tikzcd}$$

Ma abbiamo assunto che D ammettesse un limite e dunque vi è un oggetto $(L, (\lambda_j : L \to D(j)))$, per un certo $L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$, finale nella categoria dei coni su D. Questo vuol dire che esiste un unico $g \in \mathbf{D}(FA, L)$ che rende il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & FA \arrow[d, "g"] \arrow[ddl, "\varphi^{-1}_{a,D(j)}(\mu_j)"'] \arrow[ddr, "\varphi^{-1}_{A,D(i)}(\mu_i)"] & \\ & L \arrow[dl, "\lambda_j"] \arrow[dr, "\lambda_i"'] & \\ D(j) \arrow[rr, "D\alpha"'] & & D(i) \end{tikzcd}$$

Questo vuol dire che vi è un unico $f := \varphi_{A,L}(g) \in \mathbf{C}(A, GL)$ che rende il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, "\mu_j"'] \arrow[ddr, "\mu_i"] & \\ & GL \arrow[dl, "G\lambda_j"] \arrow[dr, "G\lambda_i"'] & \\ GD(j) \arrow[rr, "D\alpha"'] & & GD(i) \end{tikzcd}$$

Concludiamo che $(GL, (G\lambda_j))$ è limite di GD. □

Teorema 1.143. *Sia* $\mathbf{D}$ *una categoria localmente piccola che ammette limiti di ogni forma (localmente piccola). Allora* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *ammette un aggiunto sinistro se e solo se preserva tutti i limiti.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$. Questo è esattamente il risultato precedente.

$\Leftarrow$. Il passo centrale è mostrare che per ogni $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, la categoria $(A \downarrow G)$ ammette tutti i limiti, ovvero che ogni diagramma $D : \mathbf{J} \to (A \downarrow G)$

ammette un limite. Una volta dimostrato questo, applichiamo Lemma 1.108, che ci diceva che vi è un oggetto iniziale se e solo se il funtore $\mathbf{1}_{(\mathbf{A}\downarrow\mathbf{G})}$ ammette un limite. A questo punto la tesi segue dal teorema 1.139.

Ci siamo dunque ridotti a dover dimostrare che $(\mathbf{A}\downarrow\mathbf{G})$ ammette tutti i limiti. Sia dunque $D : \mathbf{J} \to (\mathbf{A}\downarrow\mathbf{G})$ un diagramma e consideriamo il funtore dimenticante

$$U : (\mathbf{A}\downarrow\mathbf{G}) \to \mathbf{D}$$

che a livello degli oggetti è definito come $U((B, f)) = B$. Pertanto, per ogni $\in \mathbf{J}$ con $D(j) = (B, f)$ possiamo scrivere

$$D(j) = (U(D(j)), f_j : A \to GUD(j)).$$

Per ipotesi, $\mathbf{D}$ ammette limiti di ogni forma e quindi il funtore UD ammette un limite $(L, (\lambda_j : L \to UD(j))$. Poiché G conserva i limiti, $(GL, (G\lambda_j))$ è un limite di $GUD : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$. Vogliamo utilizzare questo per produrre un oggetto iniziale in $(\mathbf{A}\downarrow\mathbf{G})$.

Ora ci ricordiamo che gli f_j sono $(\mathbf{A}\downarrow\mathbf{G})$-morfismi e dunque rendono il diagramma

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f_j"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ GUD(j) \arrow[rr, "GUDg"'] & & GUD(i) \end{tikzcd}$$

commutativo per ogni $g \in \mathbf{J}(j, i)$. Ma poiché $(GL, (G\lambda_j)$ è un limite, esso è un oggetto finale nella categoria dei coni su GUD e pertanto esiste un unico $f \in \mathbf{C}(A, GL)$ che rende il seguente diagramma commutativo:

(7)
$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"'] \arrow[ddl, "f_j"'] \arrow[ddr, "f_i"] & \\ & GL \arrow[dl, "G\lambda_j"] \arrow[dr, "G\lambda_i"'] & \\ GUD(j) \arrow[rr, "GUDg"'] & & GUD(i) \end{tikzcd}$$

In particolare otteniamo un triangolo commutativo per ogni j:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ GL \arrow[rr, "G\lambda_j"'] & & GUD(j) \end{tikzcd}$$

e quindi $\lambda_j \in (\mathbf{A}\downarrow\mathbf{G})((L, f)(UD(j), f_j))$ per ogni j. La commutatività del diagramma (7) ci dice che abbiamo un cono $((L, f), (\lambda_j))$ su D. Dobbiamo ora dimostrare che è finale. Sia dunque $((B, h), (k_j))$ un altro cono e siano l_1, l_2 morfismi da (B,h) ad (L,f) che rendono i seguenti diagrammi commutativi per ogni $g \in \mathbf{J}(j,i)$:

$$\begin{tikzcd}
& (B,h) \arrow[d, "l_1"] \arrow[ddl, "k_j"'] \arrow[ddr, "k_i"] & \\
& (L,f) \arrow[dl, "\lambda_j"] \arrow[dr, "\lambda_i"'] & \\
D(j) \arrow[rr, "Gg"'] & & D(i)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& (B,h) \arrow[d, "l_2"] \arrow[ddl, "k_j"'] \arrow[ddr, "k_i"] & \\
& (L,f) \arrow[dl, "\lambda_j"] \arrow[dr, "\lambda_i"'] & \\
D(j) \arrow[rr, "Gg"'] & & D(i)
\end{tikzcd}$$

(stiamo cioè richiedendo che siano morfismi di coni su D.) Per come sono definiti i morfismi in $(\mathbf{A} \downarrow \mathbf{G})$, questo vuol dire che abbiamo i seguenti diagrammi commutativi in $\mathbf{D}$

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, "l_1"] \arrow[ddl, "k_j"'] \arrow[ddr, "k_i"] & \\
& L \arrow[dl, "\lambda_j"] \arrow[dr, "\lambda_i"'] & \\
UD(j) \arrow[rr, "UDg"'] & & UD(i)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, "l_2"] \arrow[ddl, "k_j"'] \arrow[ddr, "k_i"] & \\
& L \arrow[dl, "\lambda_j"] \arrow[dr, "\lambda_i"'] & \\
UD(j) \arrow[rr, "UDg"'] & & UD(i)
\end{tikzcd}$$

ma poiché $(L, (\lambda_j))$ è un oggetto finale, $l_1 = l_2$ e dunque (essendo il funtore dimenticante U fedele) coincidono anche come morfismi in $(\mathbf{A} \downarrow \mathbf{G})$. $\square$

1.9.4. *Excursus sul funtore "gruppo libero".* Sia $U : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Ins}$ il funtore dimenticante, dalla categoria dei gruppi a quella degli insiemi. Tale funtore ammette un aggiunto sinistro, che è il funtore *"gruppo libero su..."*. Possiamo prendere questa come definizione (*il funtore "gruppo libero su" è l'aggiunto sinistro del funtore dimenticante*), dopo aver dimostrato (**Esercizio!**) che la categoria **Gr** ammette tutti i limiti e il funtore dimenticante li preserva. Altrimenti, possiamo definirlo come segue (cf. Teorema 1.139):

(1) Per ogni insieme X consideriamo la categoria $\mathbf{C}_X := (X \downarrow U)$.
(2) Per ogni X scegliamo ora un oggetto iniziale in $(\mathbf{X} \downarrow \mathbf{U})$ (**Esercizio:** far vedere che esiste!) e lo denotiamo $(\langle X \rangle, i_X)$.
(3) Definiamo il funtore gruppo libero $\mathrm{Fr} : \mathbf{Ins} \to \mathbf{Gr}$ a livello di oggetti come $\mathrm{Fr}(X) = \langle X \rangle$. Si può ora verificare (**Esercizio!**) che a questo punto l'effetto di Fr sui morfismi è univocamente determinato.

A questo punto l'aggiunzione tra il funtore $F :=$ "gruppo libero su $\cdot$ " e il funtore U segue dalle definizioni, in particolare dalla proprietà universale che caratterizza ogni oggetto iniziale e, dunque, ogni gruppo libero $\langle X \rangle$.

Esempio 1.144. *(**Esercizio:**controllare i dettagli dei seguenti esempi)*

- *Sia* **CP** *la categoria delle categorie piccole e sia* **Grafi** *la categoria dei grafi (orientati). Abbiamo visto all'inzio del corso che una categoria piccola può essere rappresentata tramite un grafo. Questo ci fornisce un funtore dimenticante*
$$U : \mathbf{CP} \to \mathbf{Grafi}.$$
Definiamo ora un funtore F aggiunto sinistro ad U.
Dato un grafo $\mathcal{G}$ possiamo costruire il grafo $\widetilde{\mathcal{G}}$ ottenuto da $\mathcal{G}$ aggiungendo il minimo numero di lati tali che le seguenti due proprietà valgano:
  (1) *per ogni vertice A di $\widetilde{\mathcal{G}}$ (e quindi vertice di $\mathcal{G}$) vi è un lato in $\widetilde{\mathcal{G}}$*
  $$\circlearrowright A$$
  (2) *per ogni due lati $A \to B$ e $B \to C$ del grafo $\mathcal{G}$ vi è un lato $A \to C$ in $\widetilde{\mathcal{G}}$.*

  Definiamo $F(\mathcal{G})$ come la categoria (piccola) descritta dal grafo $\widetilde{\mathcal{G}}$. Dato un morfismo di grafi $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, allora Ff è il funtore indotto (univocamente determinato) tra le categorie $F(\mathcal{G})$ e $F(\mathcal{H})$.
- *Sia* **C** *la categoria dei campi (con morfismi omomorfismi di campi) e* **D** *la categoria dei domini con morfismi omomorfismi iniettivi di domini. Allora abbiamo il funtore dimenticante*
$$U : \mathbf{C} \to \mathbf{D}.$$
*Esso ha come aggiunto destro il funtore Quot, che ad un dominio associa il suo campo dei quozienti. Per dimostrare questo, bisogna far vedere (**esercizio!**) che ogni omomorfismo di campi è un omomorfismo iniettivo di domini.*
- *Sia* **Rng** *la categoria degli anelli e sia* **Ring** *la categoria degli anelli unitari. Il funtore dimenticante $U : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Rng}$ ammette un aggiunto sinistro F definito al livello di oggetti come segue:*
$$F : Ob(\mathbf{Rng}) \to Ob(\mathbf{Ring}), \quad R \mapsto R \times \mathbb{Z}$$
dove le operazioni su $R \times \mathbb{Z}$ sono definite dalle regole:
$$(r,0)(0,1) = (0,1)(r,0) = (r,0),\ (r,0)(s,0) = (rs,0),$$
$$(0,1)(0,1) = (0,1),\ (ar,n) = a(r,n) = (r,an)$$
per ogni $a, n \in \mathbf{Z}$, $r, s \in R$.
- *Sia* $\mathbf{Ring}_*$ *la categoria degli anelli puntati (i cui oggetti sono coppie (A,a) con $A \in Ob(\mathbf{Ring})$ e $a \in A$, e i cui morfismi $f \in \mathbf{Ring}_*((A,a),(B,b))$ sono $f \in \mathbf{Ring}(A,B)$ con $f(a) = b$). Il funtore dimenticante*
$$U : \mathbf{Ring}_* \to \mathbf{Ring}$$
ha un aggiunto sinistro F che sugli oggetti è dato da
$$F : Ob(\mathbf{Ring}) \to Ob(\mathbf{Ring}_*), \qquad R \mapsto (R[x], x).$$
Questo basta a determinare univocamente l'effetto di F sui morfismi.

2. Moduli su anelli commutativi

Le referenze principali per questa parte delle note sono [1, Capitolo 2] e [5, Chapter 3].

2.1. **Prime definizioni e primi esempi.**

Sia $A = (A, +, *)$ un anello commutativo unitario.

Per alleggerire la notazione, se il contesto è chiaro, scriveremo ab anziché $a * b$ (per $a,\ b \in A$).

Vogliamo definire la categoria $\mathbf{A} - \mathbf{Mod}$ dei moduli (sinistri) su A. Cominciamo definendo gli oggetti.

Definizione 2.1. *Un A-*modulo *(o* modulo su *A) sinistro è il dato di*

- *un gruppo abeliano M (la cui operazione denoteremo solitamente con "+"),*
- *un omomorfismo di anelli unitari $A \to End(M)$.*

Ovvero, M è il dato di

- *un gruppo abeliano M*
- *una funzione*
$$A \times M \to M, \quad (a, m) \mapsto a \cdot m,$$
tale che
  - **(M1):** $1_A \cdot m = m$ *per ogni* $m \in M$*;*
  - **(M2):** $(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$ *per ogni* $a, b \in A$*, per ogni* $m \in M$*;*
  - **(M3):** $(a+b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$ *per ogni* $a, b \in A$*, per ogni* $m \in M$*;*
  - **(M4):** $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$

Nella notazione ometteremo l'omomorfismo e denoteremo semplicemente con M un A-modulo sinistro come sopra.

Osservazione 2.2. *Osserviamo che se M è un A-modulo sinistro allora $a \cdot (-m) = -(a \cdot x)$ per ogni $a \in A$ e $m \in M$ e dunque $0_A \cdot m = 0_M$ per ogni $m \in M$.*

Analogamente, si può definire il concetto di modulo destro su un anello commutativo unitario. Poiché noi ci occuperemo unicamente di moduli sinistri, ometteremo di specificarlo ogni volta e parleremo semplicemente di "A-moduli".

Prima di definire i morfismi, vediamo qualche esempio (che già conosciamo) di moduli.

Esempio 2.3.

- *Il gruppo banale* (0) *è un modulo su ogni anello.*
- *Ogni ideale di A (e dunque A stesso) è un A-modulo. Questo ci fa ritrovare anche l'esempio precedente.*
- *Sia I un ideale di A. In particolare $(I, +)$ è un sottogruppo di $(A, +)$ e, poiché $(A, +)$ è abeliano, il quoziente è A/Iha una struttura di modulo su A, data da:*
$$A \times A/I \to A, \quad (a, x + I) \mapsto ax + I.$$

- *Se k è un campo, è equivalente parlare di modulo o spazio vettoriale su k.*
- *Ogni gruppo abeliano $(G,+)$ ha una struttura di $\mathbf{Z}$-modulo, data da*

$$\mathbb{Z} \times G \to G, \quad (n,a) \mapsto \begin{cases} \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n} & \text{se } n \geq 0, \\ \underbrace{(-a)+(-a)+\ldots+(-a)}_{-n} & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

- *Se k è nuovamente un campo e $A = k[x]$, si può mostrare (**Esercizio!**) che un A-modulo non è altro che il dato di un k-spazio vettoriale assieme ad una trasformazione lineare.*
- *Sia $S \in Ob(\mathbf{Ins})$, $S \neq \emptyset$. Sia M un A-modulo e denotiamo con $U(M)$ l'insieme soggiacente ad M. Allora l'insieme di morfismi $\mathbf{Ins}(S, U(M))$ ha una struttura di gruppo abeliano data da*

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s), \qquad (f, g \in \mathbf{Ins}(S, U(M)),\ s \in S)$$

e un struttura di A-modulo data da:

$$A \times \mathbf{Ins}(S, U(M)) \to \mathbf{Ins}(S, U(M)), \quad (a, f) \mapsto (a \cdot f : s \mapsto a \cdot (f(s))).$$

Definizione 2.4. *Un* omomorfismo *f tra due A-moduli M ed M' è un omomorfismo di gruppi abeliani $f : M \to M'$ tale che*

$$f(a \cdot x) = a \cdot f(x) \quad \text{per ogni } a \in A,\ x \in M.$$

Osservazione 2.5. *Siano M, N due A-moduli. Allora l'insieme degli omomorfismi da M a N è un gruppo abeliano con somma $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ che ammette una struttura di A-modulo data da $a \cdot f(x) = f(a \cdot x)$.*

Definizione 2.6. *La categoria $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ è la categoria i cui oggetti sono A-moduli e i cui morfismi sono omomorfismi di A-moduli.*

Esercizio 2.7. *Verificare che valgono tutti gli assiomi della definizione di categoria.*

Esempio 2.8. *Se k è un campo, allora gli omomorfismi di k-moduli non sono altro che funzioni k-lineari tra spazi vettoriali. Pertanto $\mathbf{k}-\mathbf{Mod} = \mathbf{Vec_k}$.*

Esercizio 2.9. *Far vedere che vi è un'equivalenza di categorie tra $\mathbb{Z}-\mathbf{Mod}$ e $\mathbf{Ab}$.*

Esempio 2.10. *Dato un A-modulo M, si può sempre definire il morfismo nullo come l'unico morfismo $M \to (0)$ dato da $m \mapsto 0$per ogni $m \in M$. Vediamo subito che (0) è finale.*

Esercizio 2.11.
- *Dimostrare che un monorfismo in $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ è un morfismo iniettivo.*
- *Dimostrare che un epimorfismo in $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ è un morfismo suriettivo.*
- *Dimostrare che un isomorfismo in $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ è un morfismo biettivo.*

2.2. **Costruzioni.**

2.2.1. *Sottomoduli.*

Definizione 2.12. *Sia M un A-modulo. Un sottomodulo M' di M è un sottogruppo di M tale che $A \cdot M' \subseteq M$.*

Esempio 2.13.
- *Gli ideali di A sono sottomoduli di A visto come modulo su se stesso.*
- *Sia I un ideale di A e sia $M \in \mathbf{A-Mod}$. Allora definiamo*
$$IM := \left\{ \sum_{\substack{a_m \in A \\ m \in M}} a_m m \mid a_m \in I,\ \#\{a_m \neq 0\} < \infty \right\}$$
e vediamo che per definizione esso è un sottomodulo di M.
Notiamo inoltre che, dati due ideali $I, J \subseteq A$ e due A-moduli M ed M', vale $I(JM) = J(IM)$.
- *Se A oltre ad essere un anello è un dominio, allora dato $M \in \mathbf{A-Mod}$, ne possiamo definire il sottomodulo degli elementi di torsione:*
$$M_{tor} := \{m \in M \mid \exists a \in A \setminus \{0\} \text{ tale che } a \cdot m = 0\}.$$
- *Siano $M, M' \in Ob(\mathbf{A-Mod})$ e sia $f \in \mathbf{A-Mod}(M, M')$. Definiamo*
$$\ker(f) = \{m \in M \mid f(m) = 0_{M'}\},$$
$$Im(f) = \{n \in M' \mid \exists m \in M \text{ tale che } n = f(m)\}.$$
*Allora (**verificare!**) $\ker(f)$ è un sottomodulo di M e $Im(f)$ è un sottomodulo di M'.*

2.2.2. *Quozienti.*
Notiamo prima di tutto che se M è un modulo e N un suo sottomodulo, allora $(N, +) \trianglelefteq (M, +)$ e pertanto è definito il quoziente $(M/N, +)$.

Definizione 2.14. *Sia $M \in Ob(\mathbf{A-Mod})$ e sia $N \subseteq M$ un sottomodulo. Il modulo quoziente M/N di M per N è il dato di*
- $(M/N, +)$
- *$A \times M/N \to M/N$ data da $(a, x + N) \mapsto a \cdot x + N$.*

Esercizio 2.15.
- *Verificare che il dato di cui sopra definisce un A-modulo.*
- *Verificare che l'omomorfismo canonico quoziente $\pi \in \mathbf{Ab}(M, M/N)$ è un omomorfismo di moduli.*

Esempio 2.16. *Siano $M, M' \in Ob(\mathbf{A-Mod})$ e sia $f \in \mathbf{A-Mod}(M, M')$. Abbiamo già notato che $Im(f)$ è un sottomodulo di M'. Definiamo il conucleo di f come*
$$Coker(f) := M'/Im(f).$$

2.2.3. *Teorema di isomorfismo.* Siano $M, M' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ e sia $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M, M')$. Sia $N \subseteq M$ un sottomodulo tale che $N \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Allora esiste un unico $h \in \mathbf{Ab}(M/N, M')$ che rende commutativo il seguente diagramma di morfismi di gruppi abeliani:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & M/N \arrow[dl, "h"] \\ M' & \end{tikzcd}$$

Esplicitamente, h è definita come $h(m+N) = f(m)$. Pertanto si vede subito che il diagramma sopra è anche un diagramma di morfismi in $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$. Nel caso in cui $N = \mathrm{Ker}(f)$, si ottiene il teorema di isomorfismo, che già avete incontrato più volte (gruppi, spazi vettoriali, anelli, ...):

$$\mathrm{Im}(f) \simeq M/\mathrm{Ker}(f). \tag{8}$$

2.2.4. *Operazioni su sottomoduli.* Sia $M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ e sia $(M_i)_{i\in I}$ una famiglia di sottomoduli di M. Allora la loro somma $\sum M_i$ è il più piccolo sottomodulo di M che contiene tutti gli M_i. Esplicitamente, essa è definita come

$$\sum M_i := \left\{ \sum x_i \mid x_i \in M_i \text{ tali che } \#\{x_i \neq 0\} < \infty \right\}.$$

Anche la loro intersezione $\bigcap M_i = \{m \mid m \in M_i \ \text{ per ogni } i\}$ ha la struttura di modulo su A.

Proposizione 2.17. (1) *Siano $L, M, N \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ con $N \subseteq M \subseteq L$ (inclusioni di moduli). Allora*

$$L/M \simeq (L/N)/(M/N)$$

(2) *Se M_1, M_2 sono sottomoduli di M, allora*

$$(M_1 + M_2)/M_1 \simeq M_2/(M_1 \cap M_2)$$

Dimostrazione.
- Definiamo il morfismo

$$\theta : L/N \to L/M, \ x + N \mapsto x + M.$$

Questo definisce un morfismo di A-moduli poiché $a \cdot \theta(x) = a \cdot (x + M) = ax + M = \theta(a \cdot x)$. Inoltre è suriettivo e

$$\begin{aligned} \ker(\theta) &= \{x + N \mid x \in L, \ x + N \subseteq M\} \\ &= \{x + N \mid x \in M\} = M/N. \end{aligned}$$

Adesso il risultato desiderato segue da (8).
- Osserviamo che la composizione dei seguenti due morfismi

$$M_2 \to M_1 + M_2 \xrightarrow{\pi} (M_1 + M_2)/M_1$$

è suriettiva con nucleo $M_1 \cap M_2$.

$\square$

2.2.5. *Somma e prodotto diretto di moduli.* Siano $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$.

Definizione 2.18. *La* somma diretta $M \oplus N$ *è il dato di:*

- $M \oplus N := \{(m,n) \mid m \in M,\ n \in N\}$ *con somma data da*

$$(m_1, n_1) + (m_2, n_2) = (m_2, n_2) + (m_1, n_1) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2).$$

- *l'azione di A è definita anche componente per componente:*

$$A \times M \oplus N \to M \oplus N,\ (a,(m,n)) \mapsto (a \cdot m, a \cdot n)$$

Esercizio 2.19. *Verificare che $M \oplus N$ è prodotto e coprodotto di M ed N in $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$(con gli ovvi morfismi di proiezione e inclusione).*

Definizione 2.20. *Sia $(M_i)_{i\in I}$ una famiglia di di oggetti in $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$.*

(1) *La somma diretta $\bigoplus_{i\in I} M_i$ è l'A-modulo definito da*
   - $\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(m_i) \mid m_i \in M_i, \#\{m_i \neq 0\} < \infty\}$ *con somma data da*

$$(m_i) + (m_i') = (m_i') + (m_i) = (m_i + m_i').$$

   - *l'azione di A è definita anche componente per componente:*

$$A \times \bigoplus_{i\in I} M_i \to \bigoplus_{i\in I} M_i,\ (a,(m_i)) \mapsto (a \cdot m_i)$$

(2) *Il prodotto diretto $\prod_{i\in I} M_i$ è l'A-modulo definito da*
   - $\prod_{i\in I} M_i := \{(m_i) \mid m_i \in M_i\}$ *con somma data da*

$$(m_i) + (m_i') = (m_i') + (m_i) = (m_i + m_i').$$

   - *l'azione di A è definita anche componente per componente:*

$$A \times \prod_{i\in I} M_i \to \prod_{i\in I} M_i,\ (a,(m_i)) \mapsto (a \cdot m_i)$$

Esercizio 2.21. *Dimostrare che $\bigoplus_{i\in I} M_i$, rispettivamente $\prod_{i\in I} M_i$, è un coprodotto, rispettivamente prodotto, nella categoria dei moduli su A.*

Daremo adesso un criterio perché un modulo sia un prodotto diretto.

Proposizione 2.22. *Sia $M \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ e sia $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Siano $\varphi_i \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,M)$ tali che*

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j = \mathbf{1}_M, \quad \varphi_i \circ \varphi_j = 0 \text{ per ogni } i \neq j.$$

Allora

(1) $\varphi_i^2 = \varphi_i$ *per ogni $i =, \ldots n$;*
(2) $\varphi : M \to \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(M)$ *dato da $m \mapsto (\varphi_i(m))$ è un isomorfismo di A-moduli.*

Dimostrazione. (1) Per ogni $i = 1, \ldots, n$, vale

$$\varphi_i = \varphi_i \circ 1_M = \varphi_i \circ (\sum_{j=1}^{n} \varphi_j) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \circ \varphi_j) = \varphi_i^2.$$

(2) È immediato vedere che φ è un morfismo di A-moduli:

$$a \cdot \varphi(m) = a \cdot (\varphi_i(m)) = (a \cdot \varphi_i(m)) = (\varphi_i(a \cdot m)) = \varphi(a \cdot m).$$

Ci rimane dunque da dimostrare che φ è un isomorfismo. Grazie all'Esercizio 2.11 sappiamo che questo è equivalente a far vedere che φ è una biezione.

Sia $m \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ma $\varphi(m) = (0, \dots, 0)$ se e solo se $\varphi_i(m) = 0$ per ogni i e pertanto abbiamo

$$m = 1_M(m) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(m) = 0.$$

Abbiamo cosí mostrato che $\ker(\varphi) = (0)$ e per concludere ci manca solo la suriettività.

Sia $(y_1, \dots y_n) \in \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(M)$ un elemento generico. Allora per ogni i esiste un $m_i \in M$ tale che $y_i = \varphi_i(m_i)$ e quindi

$$\varphi_j(y_i) = \varphi_j(\varphi_i(m_i)) = \begin{cases} \varphi_i(m_i) = y_i & \text{se } j = i, \\ 0 & \text{se } j \neq i. \end{cases}$$

Possiamo ora considerare $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ e per quanto detto vale $\varphi_j(m) = y_j$, cioè $\varphi(m) = (y_1, \dots, y_n)$, come desiderato.

□

Dopo aver visto un criterio affinchè un modulo sia isomorfo ad un prodotto diretto, descriviamo la situazione per la somma diretta. Abbiamo prima di tutto bisogno di introdurre un poco di notazione.

Sia $M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ e sia $(M_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottomoduli di M. Abbiamo pertanto morifismi di inclusione

$$\lambda_i : M_i \hookrightarrow M$$

Definizione 2.23. *Il modulo $M \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ si dice* ammettere una scomposizione in somma diretta *se esiste una famiglia di sottomoduli $(M_i)_{i \in I}$ come sopra tali che $\lambda_* := \sum_{i \in I} \lambda_i \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(\bigoplus_{i \in I} M_i, M)$ è un isomorfismo.*

Chiaramente, il morfismo λ_* della definizione non è in generale un isomorfismo. Data una famiglia di sottomoduli (M_i) di M con morfismi di inclusione λ_i, denotiamo $\sum M_i := \lambda_*(\bigoplus_{i \in I} M_i)$. Nel caso in cui, come nella definizione, λ_* è un isomorfismo, scriveremo (con abuso di notazione) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$.

Osservazione 2.24. *M ammette una scomposizione in somma diretta ($M = \bigoplus_{i \in I} M_i$) se e solo se per ogni elemento $m \in M$ esistono unici $(m_i)_{i \in I}$ con $m_i \in M_i$ tali che $m = \sum_{i \in I} m_i$.*

2.2.6. *Moduli liberi e finitamente generati.* In questa sezione non faremo che estendere alla categoria dei moduli (eventualmente con delle restrizioni) vari risultati che sappiamo essere veri per gli spazi vettoriali.

Definizione 2.25. *Sia $M \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ e sia $S \subseteq M$ un sottoinsieme.*

- *Il* modulo generato da S in M *è*
$$\langle S\rangle := \left\{ \sum_{\substack{a_s\in A\\ s\in S}} a_s s \mid \#\{a_s \neq 0\} < \infty \right\}.$$
- *Se $\#S < \infty$, diciamo che $\langle S\rangle$ è* finitamente generato*.*
- *L'insieme S è* linearmente indipendente *se*
$$\sum_{s\in S} a_s s = 0 \quad \Rightarrow \quad a_s = 0\ \forall s \in S.$$
- *S è una* base *per M se è linearmente indipendente e se $\langle S\rangle = M$.*

Osservazione 2.26. *Se $A \neq (0)$ ed M ammette una base, allora $M \neq 0$ e tutti i suoi elementi ammettono un'unica scrittura come combinazione A-lineare degli elementi della base.*

Definizione 2.27. *Sia $M \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$. Allora M è detto* modulo libero *se ammette una base o se $M = (0)$.*

Teorema 2.28 (Proprietà universale dei moduli liberi)**.** *Sia $M \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$, $I \neq \emptyset$ e $(x_i)_{i\in I}$ una base per M. Se $(y_i)_{i\in I}$ è una collezione di elementi di $N \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$, allora esiste un unico morfismo $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,N)$ tale che $f(x_i) = y_i$ per ogni $i \in I$.*

Dimostrazione. Poiché $(x_i)_{i\in I}$ è una base per M, un generico elemento $m \in M$ ammette un'unica scrittura $m = \sum_{i\in I} a_i x_i$. per un tale m, definiamo
$$f(m) := \sum_{i\in I} a_i y_i.$$
Per costruzione, f è chiaramente un morfismo di A-moduli e soddisfa la proprietà richiesta $f(x_i) = y_i$ per ogni i.

Infine l'unicità segue dal fatto che ogni $h \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,N)$ deve essere tale che
$$h(\sum_{i\in I} a_i x_i) = \sum_{i\in I} a_i h(x_i)$$
e dunque la richiesta $h(x_i) = y_i$ determina univocamente il morfismo e implica $h = f$. □

Corollario 2.29. *Nelle ipotesi del teorema precedente, se inoltre $(y_i)_{i\in I} \subseteq N$ sono una base, allora $N \simeq M$.*

Dimostrazione. Si trovano unici $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,N)$, $h \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(N,M)$, $\mathbf{1}_M(M,M)$ e $\mathbf{1}_N(N,N)$ unici tali che mandano la base prescelta nella base prescelta. A questo punto di nota che anche $h \circ f(x_i) = x_i$ e $f \circ h(y_i) = y_i$ per ogni i e pertanto deve valere $h \circ f = \mathbf{1}_M$ e $f \circ h = \mathbf{1}_N$. □

Corollario 2.30. *Due A-moduli (liberi) le cui basi sono in biezione sono isomorfi.*

Esempio 2.31. *Quanto enunciato nel corollario era ben noto sin dai tempi di algebra lineare per gli spazi vettoriali finito dimensionali.*

Sia ora $I \neq \emptyset$, consideriamo la somma diretta
$$F := \bigoplus_{i \in I} A.$$
Essa ammette una base $(e_i)_{i\in I}$ data da $e_i = (0,\dots,0,1,0\dots,0)$ e pertanto concludiamo che F è un modulo libero.

Corollario 2.32. *Se $M \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod}) \setminus \{(0)\}$ è un modulo libero, allora esiste un insieme non vuoto I tale che $M \simeq \bigoplus_{i\in I} A$*

Se $I = \{1,2,\dots,n\}$, scriviamo $A^n := \bigoplus_{i=1}^n A$.

Proposizione 2.33. *Sia $M \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$. Allora M è finitamente generato se e solo se esiste un $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ ed un epimorfismo $\varphi \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(A^n, M)$ (ovvero M è isomorfo ad un quoziente di A^n).*

Dimostrazione. Supponiamo che M sia finitamente generato. Allora troviamo un insieme finito I e degli elementi $x_i \in M$ tali che $(x_i)_{i\in I}$ sia un insieme di generatori. Sia $n := \#I$, possiamo allora indicizzare gli x_i con numeri interi da 1 a n. Poiché $(e_i)_{i\in I}$ è una base per A^n, un generico elemento di A^n avrà un'unica scrittura $y = \sum a_i e_i$ e possiamo definire $\varphi \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(A^n, M)$ come $\varphi(\sum a_i e_i) := \sum a_i x_i$. Siccome (x_i) è un insieme di generatori per M, il morfismo appena definito è suriettivo e da (8) deduciamo che
$$M = \mathrm{Im}(\varphi) \simeq A^n/\mathrm{Ker}(\varphi).$$
Sia ora $\varphi \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(A^n, M)$ un epimorfismo. Prendiamo un generico elemento di $m \in M$. Poichè φ è un epimorfismo, esso è suriettivo e pertanto troviamo un $x \in A^n$ tale che $\varphi(x) = m$. Siccome $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ è una base di A^n, possiamo scrivere (in modo unico) $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ con $a_i \in A$. Ma allora $m = \varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi(e_i)$. Questo dimostra che $(\varphi(e_i))$ è un insieme di generatori per M. □

2.2.7. *Duali.*

Definizione 2.34. *Sia $M \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$.*

- *Il suo* duale *è $M^* = \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M, A)$.*
- *Un elemento $\varphi \in M^*$ è detto* funzionale *su M.*

Osserviamo che come nel caso degli spazi vettoriali possiamo definire un morfismo $\theta \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M, M^{**})$, definito come segue:

$$\theta : M \to M^{**} = \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M^*, A), \quad m \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(m))$$

Se M è un modulo libero, allora questo morfismo è iniettivo. Poichè M è libero, trovo una base $(m_i)_{i\in I}$ e posso definire omomorfismi $\pi_i \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M, A) + M^*$ come $\pi_i(\sum a_i m_i) = a_i$. Ora, $m \in \ker(\theta)$ se e solo se $\varphi(m) = 0$ per ogni $\varphi \in M^*$, quindi in particolare, $\pi_i(m) = 0$ per ogni $i \in I$ e dunque m=0.

Osservazione 2.35. *Notiamo che il morfismo θ non è iniettivo se M ha della torsione. Per esempio, se $M = k[x]/(x^2) \in \mathbf{k[x]}-\mathbf{Mod}$, allora se $f \in M^*$ se e solo se deve valere $f(x^2) = 0$, ma poichè f è $k[x]$-lineare, si deve avere $f(x^2) = x^2 f(1) = 0$. Ne deduciamo che $f(1) = 0$ (siccome chiaramente non vi son elementi di torsione in $k[x]$) e dunque $f = 0$, dato che $1 \in M$ è un generatore.*

Teorema 2.36. *Sia $M \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ tale che $M \simeq A^n$ per qualche $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ (cioè, M libero e finitamente generato). Allora $M^* \simeq A^n$ a sua volta.*

Dimostrazione. Sia $(m_i)_{i=1,\dots n}$ una base per M.

Per ogni $i = 1, \dots n$, consideriamo il funzionale $m_i^* \in M*$ dato da

$$m_i^*(m_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Facciamo ora vedere la $(m_i^*)_{i=1,\dots n}$ è una base per M^*.

Prima di tutto, vediamo che generano. Sia $f \in M^*$ ed $m \in M$. Poiché (m_i) è una base, esistono unici a_i tali che $m = \sum_{i=1}^n a_i m_i$ e abbiamo

$$f(m) = \sum_{i=1}^n a_i f(m_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(m_i) m_i^*(m_i) = \sum_{i=1}^n f(m_i) m_i^* \left(\sum_{i=1}^n a_i m_i, \right)$$

ovvero, $f = \sum_{i=1}^n f(m_i) m_i^*$.

Per concludere, dobbiamo mostrare la lineare indipendenza dell'insieme $(m_i^*)_{i=1}^n$. Pertanto assumiamo che vi siano $b_i \in A$ tali che $\sum_{i=1}^n b_i m_i^* = 0$. Poiché è un funzionale, esso deve essere nullo e valutato su ogni elemento di M e quindi, in particolare,

$$0 = (\sum b_i m_i^*)(m_j) = \sum_{i=1}^n b_i m_i^*(m_j) = b_j,$$

cioè tutti i coefficienti devono essere nulli. □

Sia $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}^{\mathbf{l.f.g.}}$ la sottocategoria piena di $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ i cui oggetti sono gli A-moduli liberi e finitamente generati.

Corollario 2.37. *Vi è un isomorfismo naturale*

$$\eta \in [\mathbf{A}-\mathbf{Mod}^{\mathbf{l.f.g.}}, \mathbf{A}-\mathbf{Mod}^{\mathbf{l.f.g.}}](\mathbf{1}_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}^{\mathbf{l.f.g.}}}, \cdot^{**}).$$

Corollario 2.38. *Vi è un'equivalenza di categorie tra* $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}^{\boldsymbol{l.f.g.}}$ *e* $(\mathbf{A}-\mathbf{Mod}^{\boldsymbol{l.f.g.}})^{opp}$.

2.2.8. *Prodotti tensoriali.* In questa sezione avremo più volte bisogno di considerare l'immagine di A-moduli rispetto al funtore dimenticante U : $\mathbf{A}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{Set}$. Per alleggerire la notazione, nella maggior parte delle occorrenze, dove è chiaro che stiamo lavorando nella categoria degli insiemi, ometteremo "U" dalla notazione e scriveremo, ad esempio, M anziché $U(M)$.

Definizione 2.39. *Siano* $M, N, P \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$. *Un morfismo di insiemi* $f \in \boldsymbol{Ins}(M \times N, P)$ *si dice* A*-bilineare se* $f(\cdot, n) \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,P)$ *per ogni* $n \in N$ *ed* $f(m,\cdot) : \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(N,P)$ *per ogni* $m \in M$.

Il seguente risultato ci permetterà di costruire un $T \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ avente la proprietà che $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}(T,P)$ è in biezione con la collezione delle applicazioni A-bilineari $M \times N \to P$ per ogni $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$.

Proposizione 2.40. *Siano* $M, N \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$. *Allora esiste una coppia* (T,g), *con* $T \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod}))$ *e* $g \in \mathbf{Ins}(M\times N, T)$ A*-bilineare tale che per ogni* $P \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ *e per ogni* $f \in \mathbf{Ins}(M \times N, P)$ A*-bilineare, esiste un'unica* $\bar{f} \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(T,P)$ *tale che il seguente triangolo (di morfismi di insiemi) è commutativo*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & P \end{tikzcd}$$

Inoltre, se (T,g) *e* (T',g') *sono entrambi come sopra, allora esiste un unico isomorfismo* $h \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(T,T')$.

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando l'unicità. Siano dunque (T,g) e (T',g') come sopra. Applichiamo la proprietà universale della prima parte dell'enuneciato quattro volte:

(1) poiché $g' \in \mathbf{Ins}(M\times N, T')$ è bilineare, esiste un unico morfismo $\bar{g'} \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(T,T')$ tale che $g'(m,n) = \bar{g'} \circ g(m,n)$ per ogni $(m,n) \in M \times N$;
(2) poiché $g \in \mathbf{Ins}(M \times N, T)$ è bilineare, esiste un unico morfismo $\bar{g} \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(T',T)$ tale che $g(m,n) = \bar{g}\circ g'(m,n)$ per ogni $(m,n) \in M \times N$;
(3) poiché $g \in \mathbf{Ins}(M \times N, T)$ è bilineare, esiste un unico morfismo $\bar{k} \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(T,T)$ tale che $g(m,n) = \bar{k} \circ g(m,n)$ per ogni $(m,n) \in M \times N$;
(4) poiché $g' \in \mathbf{Ins}(M \times N, T')$ è bilineare, esiste un unico morfismo $\bar{l} \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(T',T')$ tale che $g'(m,n) = \bar{l}\circ g'(m,n)$ per ogni $(m,n) \in M \times N$.

Ora notiamo che $\mathbf{1}_T, \bar{g}\circ\bar{g'} \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(T,T)$ hanno la proprietà che $g(m,n) = \mathbf{1}_T \circ g(m,n)$ e $g(m,n) = (\bar{g}\circ\bar{g'})\circ g(m,n)$ per ogni $(m,n) \in M \times N$. Dunque per (3) devono coincidere. Con lo stesso ragionamento, (4) ci porta a concludere che $\bar{g'} \circ \bar{g} = \mathbf{1}_{T'}$.

Per mostrare l'esistenza di (T,g), li costruiremo esplicitamente e verifichero che hanno le proprietà desiderate. Sia dunque

$$C := \bigoplus_{(m,n)\in M\times N} A$$

l'A-modulo libero il cui elemento generico si scrive dunque $\sum_{(m,n)\in M\times N} a_{(m,n)}(m,n)$ (dove solo un numero finito di $a_{(m,n)} \in A$ sono non nulli).

Consideriamo il sottomodulo D di C generato dal seguente insieme:

$$\{(m+m',n)-(m',n)-(m,n),\ (m,n+n')-(m,n)-(m,n'),$$
$$a\cdot(m,n)-(a\cdot m,n),\ a\cdot(m,n)-(m,a\cdot n) \mid m,m' \in M,\ n,n' \in N, a \in A\}$$

e definiamo infine $T := C/D$. Denotiamo con $m \otimes n := \pi((m,n))$, dove $\pi : C \to T = C/D$ denota l'applicazione quoziente canonica. Poiché C ha una base data da $((m,n))_{(m,n)\in M\times N}$, l'insieme $(m\otimes n)_{(m,n)\in M\times N}$ genera T. Otteniamo pertanto un morfismo $g \in \mathbf{Ins}(M\times N, T)$ dato da $(m,n) \mapsto m\otimes n$ che è A-bilineare per come abbiamo definito D. Ora per ogni $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$, ogni funzione $f \in \mathbf{Ins}(M\times N, P)$ estende (per A-linearità) ad un morfismo $f' \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(C,P)$. La A-bilinearità di f implica inoltre che $f'(D) = 0$ e pertanto esiste un unico morfismo $\bar{f} \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(T,P)$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f'"'] & T \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & P \end{tikzcd}$$

La commutatività del triangolo in **Ins** seguente ne è un'immediata conseguenza.

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & P \end{tikzcd}$$

□

Definizione 2.41. *T della precedente proposizione è detto* prodotto tensoriale di *M ed N e viene denotato $M \otimes_A N$ (o $M\otimes N$ se è chiaro in quale categoria stiamo lavorando).*

Osservazione 2.42. *Se (m_i) e (n_j) sono, rispettivamente, generatori per M ed N, allora $(m_i \otimes n_j)$ è un insieme di generatori per $M \otimes N$. Ne deduciamo che se M ed N sono finitamente generati, allora anche il loro prodotto tensoriale è tale.*

Analogamente, vale il seguente risultato per applicazioni multilineari, che ci permette di definire il prodotto tensoriale di più di due moduli.

Proposizione 2.43. *Siano $M_1, \dots, M_r \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$. Allora esiste una coppia (T, g), con $T \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod}))$ e $g \in \mathbf{Ins}(M_1 \times \ldots \times M_r, T)$ A-multilineare tale che per ogni $P \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ e per ogni $f \in \mathbf{Ins}(M_1 \times \ldots \times M_r, P)$ A-multilineare, esiste un'unica $\bar{f} \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(T, P)$ tale che il seguente triangolo (di morfismi di insiemi) è commutativo*

$$\begin{tikzcd} M_1 \times \ldots \times M_r \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & P \end{tikzcd}$$

Inoltre, se (T, g) e (T', g') sono entrambi come sopra, allora esiste un unico isomorfismo $h \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(T, T')$.

Dimostrazione. Adattare la dimostrazione della precedente Proposizione al caso multilineare (**Esercizio**). $\square$

La seguente proposizione ci fornisce una serie di isomorfismi canonici.

Proposizione 2.44. *Siano $M, N, P \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$. Allora si hanno i seguenti isomorfismi unici di A-moduli:*

(1) *$M \otimes N \simeq N \otimes M$, tale che $m \otimes n \mapsto n \otimes m$;*
(2) *$(M \otimes N) \otimes P \simeq M \otimes (N \bigotimes P) \simeq M \otimes N \otimes P$, tali che $(m \otimes n) \otimes p \mapsto m \otimes (n \otimes p) \mapsto m \otimes n \otimes p$;*
(3) *$(M \oplus N) \otimes P \simeq (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$, dato da $(m, n) \otimes p \mapsto (m \otimes p, n \otimes p)$;*
(4) *$A \otimes M \simeq M$, dato $a \otimes m \mapsto am$.*

Dimostrazione. La dimostrazione consiste nel far vedere che effettivamente i morfismo sono ben definiti. Si tratta di verifiche standard, per cui ne mostreremo solo una (le altre verifiche son lasciate come **Esercizio**).

(1) Consideriamo l'applicazione di insiemi
$$M \times N \to N \otimes M, \quad (m, n) \mapsto n \otimes m.$$
Essa è chiaramente bilineare e pertanto induce un unico morfismo $\bar{f} \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M \otimes N, N \otimes M)$ tale che $\bar{f}(m \otimes n) = n \otimes m$. Stesso ragionamento mostra che esiste un unico $\bar{g} \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(N \otimes M, M \otimes N)$ tale che $\bar{g}(n \otimes m) = m \otimes n$. Inoltre, $\bar{g} \circ \bar{f} = \mathbf{1}_{M \otimes N}$ e $\bar{f} \circ \bar{g} = \mathbf{1}_{N \otimes M}$. $\square$

Vogliamo far vedere che $M \otimes \cdot$ è un funtore sulla categoria $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$. Dobbiamo dunque descriverne l'effetto sui morfismi.

Siano $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M, M')$ e $g \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(N, N')$, allora
$$h : M \times N \to M' \otimes N', \quad (m, n) \mapsto f(m) \otimes g(n)$$
è bilineare e pertanto esiste un unico A-morfismo $f \otimes g \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M \otimes N, M' \otimes N')$ tale che $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$.

Ora, se inoltre abbiamo $f' \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M', M'')$ e $g' \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(N', N'')$, allora troviamo morfismi

$$(f' \cdot f) \otimes (g' \circ g),\ (f' \otimes g') \circ (f \otimes g) \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M \otimes N, M'' \otimes N''),$$

che coincidono sui generatori e pertanto devono coincidere. Ne deduciamo che per ogni f, f', g, g' come sopra si ha

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$$

Cioè tensorizzare commuta con la composizione di funzioni. Questo ci permette di definire per ogni $M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ il funtore

$$M \otimes \cdot : \mathbf{A}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$$

definito come

$$M \otimes \cdot : Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod}) \to \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod}), \quad X \mapsto M \otimes X$$

$$M \otimes \cdot : \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(X, Y) \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M \otimes X, M \otimes Y), \quad f \mapsto \mathbf{1}_M \otimes f$$

Analogamente, possiamo definire il funtore $\cdot \otimes M$ per ogni A-modulo M.

Allora il primo punto della proposizione ci fornisce immediatamente il seguente risultato:

Corollario 2.45. *Vi è un isomorfismo naturale $\eta : M \otimes \cdot \to \cdot \otimes M$.*

2.3. **Restrizione ed estensione di scalari.** Sia $f \in \mathbf{CRing}(A, B)$ (omomorfismo di anelli commutativi con unità) e sia $N \in \mathbf{B}-\mathbf{Mod}$. Allora f induce su N una struttura di A-modulo:

$$A \times N \to N, \quad (a, n) \mapsto f(a) \cdot n.$$

Denotiamo $\mathrm{Res}^f(N)$ l'A-modulo cosí ottenuto a partire da $N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}-\mathbf{Mod})$.

Questo ci permette di definire un funtore $\mathrm{Res}^f : \mathbf{B}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$.

Osservazione 2.46. *Poiché B è un B-modulo, f induce in particolare una struttura di A-modulo su B.*

Proposizione 2.47. *Sia $f \in \mathbf{CRing}(A, B)$ tale che $Res^f(B) \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ sia finitamente generato. Se $N \in Ob(\mathbf{B}-\mathbf{Mod})$ è finitamente generato, allora anche $Res^f N \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ è finitamente generato.*

Dimostrazione. Sia $(n_i)_{i \in I}$ un insieme di generatori per N tale che $\#I < \infty$. Allora ogni elemento $n \in \mathrm{Res}^f N$ è per definizione un elemento di N e dunque esistono $b^i \in B$ tali che $n = \sum b^i n_i$. Ma per ipotesi $\mathrm{Res}^f B$ è un A-modulo finitamente generato e quindi esiste un insieme finito $(b_j)_{j \in J}$ tale che ogni elemento di b può essere scritto come combinazione A-lineare di essi. Quindi per ogni $j \in J$ esistono collezioni $(a_j^i)_{j \in J}$ tali che $\sum a_j^i b_j = b^i$. Ne deduciamo che $n = \sum_{i,j} a_i^j b_j n_i$, cioè che $(b_j n_i)$ è un insieme di generatori. Pertanto anche $\mathrm{Res}^f(N) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ è finitamente generato. $\square$

A questo punto siamo pronti per definire il funtore *estensione di scalari*. Sia $f \in \mathbf{CRing}(A, B)$ e sia $M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} - \mathbf{Mod})$. Allora possiamo considerare il prodotto tensoriale $\mathrm{Res}^f B \otimes_A M$: questo A-modulo ammette una struttura di B-modulo, ricordando che gruppo abeliano parte del dato per $\mathrm{Res}^f B$ non è altro che B. La struttura di B-modulo è data da:

$$B \times (\mathrm{Res}^f B \otimes M) \to (\mathrm{Res}^f B \otimes M), \quad (b, b' \otimes m) \mapsto (bb') \otimes m.$$

Otteniamo dunque un funtore

$$\cdot_B := \mathrm{Res}^f B \otimes \cdot : \mathbf{A} - \mathbf{Mod} \to \mathbf{B} - \mathbf{Mod}.$$

Anche in questo caso possiamo controllare l'effetto di tale funtore sui moduli finitamente generati.

Proposizione 2.48. *Sia $M \in Ob(\mathbf{A} - \mathbf{Mod})$ finitamente generato. Allora M_B è a sua volta finitamente generato.*

Dimostrazione. Sia (m_i) un insieme finito di generatori per M. Allora la tesi segue immediatamente dal fatto che $(1 \otimes m_i)$ è un insieme di generatori per M_B. □

Proposizione 2.49. *Il funtore $\cdot_B$ è aggiunto a sinistra di Res^f.*

Dimostrazione. Cominciamo trovando due collezioni di funzioni (di insiemi) per ogni coppia $(M, N) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} - \mathbf{Mod}) \times \mathrm{Ob}(\mathbf{B} - \mathbf{Mod})$

$$\varphi_{M,N} : \mathbf{B} - \mathbf{Mod}(M_B, N) \to \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(M, \mathrm{Res}^f N)$$

e

$$\widetilde{\varphi}_{M,N} : \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(M, \mathrm{Res}^f N) \to \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(M_B, N).$$

Per ogni $g \in \mathbf{B} - \mathbf{Mod}(M_B, N)$ definiamo $\varphi_{M,N}(g) \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(M, \mathrm{Res}^f N)$ come

$$\varphi_{M,N}(g) : M \to \mathrm{Res}^f N, \quad m \mapsto g(1 \otimes m).$$

Per ogni $h \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(M, \mathrm{Res}^f N)$ definiamo prima la funzione A-bilineare $\bar{\varphi}_{M,N}(h) \in \mathbf{Ins}(B \times M, N)$:

$$\bar{\varphi}_{M,N}(h) : B \times M \to N, \quad (b, m) \mapsto b \cdot h(m).$$

A questo punto sappiamo che esiste un'unica $\overline{h} \in \mathbf{B} - \mathbf{Mod}(\mathrm{Res}^f B \otimes M, N)$ tale che $\overline{h}(b \otimes m) = b \cdot h(m)$. Poniamo $\widetilde{\varphi}_{M,N}(h) := \overline{h}$.

La verifica che queste funzioni sono una l'inversa dell'altra è immediata:

$$\begin{aligned}(\widetilde{\varphi}_{M,N} \circ \varphi_{M,N})(g)(b \otimes m) &= \widetilde{\varphi}_{M,N}(\varphi_{M,N}(g))(b \otimes m) \\ &= b \cdot (\varphi_{M,N}(g))(m) \\ &= b \cdot g(1 \otimes m) = g(b \otimes m).\end{aligned}$$

$$(\varphi_{M,N} \circ \widetilde{\varphi}_{M,N})(h)(m) = \varphi_{M,N}(\widetilde{\varphi}_{M,N}(h))(m) = \widetilde{\varphi}_{M,N}(h)(1 \otimes m) = 1 \cdot h(m).$$

Per concludere bisogna mostrare che i $(\varphi_{M,N})$ sono naturali in M ed N, cioè che per ogni $k \in \mathbf{B}-\mathbf{Mod}(N,N')$ e per ogni $l \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,M')$ i seguenti due quadrati sono sempre commutativi:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}-\mathbf{Mod}(M_B,N) \arrow[r, "\varphi_{M,N}"] \arrow[d, "k\circ\cdot"'] & \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,\mathrm{Res}^f N) \arrow[d, "k\circ\cdot"] \\
\mathbf{B}-\mathbf{Mod}(M_B,N') \arrow[r, "\varphi_{M,N'}"] & \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,\mathrm{Res}^f N')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M',\mathrm{Res}^f N) \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_{M',N}"] \arrow[d, "\cdot\circ l"'] & \mathbf{B}-\mathbf{Mod}(M'_B,N) \arrow[d, "\cdot\circ(1\otimes l)"] \\
\mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,\mathrm{Res}^f N) \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_{M,N}"] & \mathbf{B}-\mathbf{Mod}(M_B,N)
\end{tikzcd}$$

Infatti:

$$k \circ \varphi_{M',N}(g)(m) = k(g(1\otimes m)) = (k\circ g)(1\otimes m) = \varphi_{M',N'}(k\circ g)(m)$$

e

$$\widetilde{\varphi}_{M,N}(h\circ l)(b\otimes m) = b\cdot(h\circ l(m)) = \widetilde{\varphi}_{M,N'}((1\otimes l)(b\otimes m).$$

□

2.4. **L'aggiunzione $\cdot\otimes P \dashv \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P,\cdot)$.** Per ogni oggetto $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$, possiamo considerare due funtori:

$$\cdot\otimes P : \mathbf{A}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}, \qquad \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P,\cdot) : \mathbf{A}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}.$$

Proposizione 2.50. *Per ogni $P \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$, il funtore $\cdot\otimes P$ è aggiunto a sinistra del funtore $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P,\cdot)$.*

Dimostrazione. Per ogni $M,N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$, le biezioni cercate sono

$$\varphi_{M,N} : \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M\otimes P,N) \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,\mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P,N)), \quad g \mapsto (m \mapsto g(m\otimes\cdot))$$

con inversa

$$\widetilde{\varphi}_{M,N} : \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,\mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P,N)) \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M\otimes P,N), \quad h \mapsto \widetilde{\varphi}_{M,N}(h),$$

dove $\widetilde{\varphi}_{M,N}(h) \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M\otimes P,N)$ è l'unico A-morfismo tale che $\widetilde{\varphi}_{M,N}(h)(m\otimes p) = h(m)(p)$. È immediato verificare che sono effettivamente l'una l'inversa dell'altra:

$$(\widetilde{\varphi}_{M,N}\circ\varphi_{M,N})(g)(m)(p) = \widetilde{\varphi}_{M,N}(m\mapsto g(m\otimes p)) = g(m)(p)$$

$$(\varphi_{M,N}\circ\widetilde{\varphi}_{M,N})(h)(m\otimes p) = \varphi_{M,N}(h(m))(p) = h(m\otimes p)$$

Esercizio: verificare che sono naturali in M ed N. □

2.5. **Successioni esatte.**

Definizione 2.51. *Una successione di A-moduli e A-morfismi*

$$\dots \xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \dots$$

si dice:

- esatta in M_i *se* $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$;
- esatta *se è esatta in* M_i *per ogni* i.

Osservazione 2.52.

- *Una successione*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$$

è esatta se e solo se $0 = Im(0) = Ker(f)$, *cioè se e solo se* f *è iniettiva;*

- *una successione*

$$M \xrightarrow{g} M' \longrightarrow 0$$

è esatta se e solo se $Im(g) = Ker(0) = M'$, *ovvero se e solo se* g *è suriettiva;*

- *una successione*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{9}$$

è esatta se e solo se f *è iniettiva,* g *è suriettiva e* g *induce un isomorfismo tra* $Coker(f) = M/Im(f) = M/ker(g)$ *e* M''.

Definizione 2.53. *Una successione della forma* (9) *si dice* successione esatta corta.

Osservazione 2.54. *Una successione esatta lunga*

$$\dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \dots$$

può essere spezzata in una collezione di successioni esatte corte

$$0 \longrightarrow Ker(f_{i+1}) \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_{i+1}} Im(f_{i+1}) \longrightarrow 0$$

Definizione 2.55. *Un funtore* $F : \mathbf{A-Mod} \to \mathbf{B-Mod}$ *si dice*

- esatto a destra *se per ogni successione esatta di A-moduli di forma*

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0\ ,$$

anche la successione di B-moduli

$$FM' \xrightarrow{Fu} FM \xrightarrow{Fv} FM'' \longrightarrow 0$$

è esatta;

- esatto a sinistra *se per ogni successione esatta di A-moduli di forma*
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \ ,$$
anche la successione di B-moduli
$$0 \longrightarrow FM' \xrightarrow{Fu} FM \xrightarrow{Fv} FM''$$
è esatta;
- esatto *se manda ogni successione esatta in una successione esatta.*

Se $F : \mathbf{A}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{B}-\mathbf{Mod}$ *è un funtore controvariante, esso si dice*

- esatto a sinistra *se per ogni successione esatta di A-moduli di forma*
$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0 \ ,$$
anche la successione di B-moduli
$$0 \longrightarrow FM'' \xrightarrow{Fg} FM \xrightarrow{Fv} FM'$$
è esatta;
- esatto a destra *se per ogni successione esatta di A-moduli di forma*
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \ ,$$
anche la successione di B-moduli
$$FM'' \xrightarrow{Fu} FM \xrightarrow{Fv} FM' \longrightarrow 0$$
è esatta;
- esatto *se manda ogni successione esatta in una successione esatta.*

Il seguente risultato si dice che il funtore $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P,\cdot)$ ed il funtore controvariante $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}(\cdot,P)$ sono esatti a sinistra.

Proposizione 2.56. (1)
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$
è esatta se e solo se per ogni $P \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ *la seguente successione è esatta:*
$$0 \longrightarrow \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P,M') \xrightarrow{u\circ\cdot} \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P,M) \xrightarrow{v\circ\cdot} \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P,M'')$$

(2) *La successione*
$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$
è esatta se e solo se per ogni $P \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ *la seguente successione è esatta:*
$$0 \longrightarrow \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M'',P) \xrightarrow{\cdot\circ v} \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,P) \xrightarrow{\cdot\circ u} \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M',P)$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima implicazione di (1). Le altre tre implicazioni sono lasciate come **Esercizio**.

(1) Sia

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

una successione esatta. Dobbiamo verificare che per ogni $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ la successione

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P, M') \xrightarrow{u\circ\cdot} \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P, M) \xrightarrow{v\circ\cdot} \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P, M'')$$

è effettivamente esatta.

Cominciamo mostrando che $u \circ \cdot$ è iniettiva. Sia dunque $\varphi \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P, M')$ nel nucleo di $u \circ \cdot$. Allora, $u \cdot \varphi = 0$ e quindi $u(\varphi(p)) = 0$ per ogni $p \in P$, che, poiché u è iniettiva implica $\varphi(p) = 0$ per ogni $p \in P$ e dunque $\varphi = 0$.

Dobbiamo adesso far vedere che $\mathrm{Im}(u \circ \cdot) = \mathrm{Ker}(v \circ \cdot)$. Poiché $v \circ u = 0$, allora vediamo immediatamente che $\mathrm{Im}(u \circ \cdot) \subseteq \mathrm{Ker}(v \circ \cdot)$. Per l'altra implicazione usiamo una seconda volta l'iniettività di u, che ci permette di dire che $M' \simeq \mathrm{Im}(u)$ e quindi si può definire un inversa $u^{-1} : \mathrm{Im}(u) \to M'$. D'altronde, $v \circ \psi = 0$ se e solo se $v \circ \psi(p) = 0$ per ogni $p \in P$, cioè se e solo se $\psi(p) \in \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$ per ogni $p \in P$. Ma allora possiamo scrivere $\psi(p) = u(u^{-1}(\psi(p)))$ e quindi, se definiamo $\varphi := u^{-1} \circ \psi \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P, M')$, abbiamo $\psi = u \circ \varphi \in \mathrm{Im}(u \circ \cdot)$.

□

Esercizio 2.57. *Dimostrare che* $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P, \cdot)$, *rispettivamente* $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}(\cdot, P)$, *è esatto a destra se e solo se* P *è proiettivo, rispettivamente iniettivo.*

2.5.1. *Aggiunzione ed esattezza.* La seguente proposizione mette in relazione i concetti di aggiunzione ed esattezza:

Proposizione 2.58. *Sia* $F : \mathbf{A}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{B}-\mathbf{Mod}$ *un funtore.*

(1) *Se* F *ammette un aggiunto destro, allora* F *è esatto a destra;*
(2) *se* F *ammette un aggiunto sinistro, allora* F *è esatto a sinistra.*

Dimostrazione. (1) Supponiamo che esista un funtore $G : \mathbf{B}-Mod \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ e una collezione di biiezioni

$$\varphi_{M,N} : \mathbf{B}-\mathbf{Mod}(FM, N) \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M, GN),$$

per ogni $M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$, $N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}-\mathbf{Mod})$ naturali in entrambi gli argomenti.

Sia ora

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta. Allora Proposizione 2.56 implica che per ogni $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}-\mathbf{Mod})$ la successione indotta è esatta:

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M'', GP) \xrightarrow{\cdot\circ v} \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M, GP) \xrightarrow{\cdot\circ u} \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M', GP).$$

Ma poiché $(\varphi_{M,N})$ sono biezioni naturali, la precedente successione è esatta se e solo se la seguente successione è esatta per ogni $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}-\mathbf{Mod})$

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(FM'', P) \xrightarrow{\cdot\circ Fv} \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(FM, P) \xrightarrow{\cdot\circ Fu} \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(FM', P).$$

Possiamo ora applicare nuovamente Proposizione 2.56 che ci dice che l'esattezza di tale successione per ogni $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}-\mathbf{Mod})$ equivale all'esattezza della successione seguente:

$$FM' \xrightarrow{Fu} FM \longrightarrow FM'' \xrightarrow{Fv} 0$$

(2) **Esercizio**.

$\square$

Corollario 2.59. *Il funtore $\cdot_B : \mathbf{A}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{B}-\mathbf{Mod}$ è esatto a destra ed il funtore $Res^f : \mathbf{B}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ è esatto a sinistra.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal risultato precedente assieme a Proposizione 2.49. $\square$

Corollario 2.60. *Per ogni $P \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$, il funtore $\cdot\otimes P : \mathbf{A}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ è esatto a destra ed il funtore $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}(P, \cdot) : \mathbf{A}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{A}-\mathbf{Mod}$ è esatto a sinistra.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal risultato precedente assieme a Proposizione 2.50. $\square$

2.5.2. *Moduli piatti.* Abbiamo appena visto che per ogni $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ il funtore $\cdot\otimes P$ è esatto a destra. Il seguente esempio mostra che generalmente non è esatto.

Esempio 2.61. *Sia $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Si consideri la seguente successione esatta di $\mathbb{Z}$-moduli:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{a\mapsto na} \mathbb{Z}.$$

Vediamo subito che $\cdot\otimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ non preserva l'esattezza: il morfismo iniettivo $a \mapsto na$ viene mandato in

$$\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \qquad a\otimes\overline{c} \mapsto (na)\otimes\overline{c} = a\otimes\overline{nc} = 0.$$

Definizione 2.62. *Sia $P \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$. Allora P si dice piatto (su A) se $\cdot\otimes P$ è esatto.*

Esempio 2.63. *Abbiamo dimostrato che per ogni $M \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ si ha un isomorfismo canonico $M \simeq M\otimes A$. Ne segue immediatamente che A è un A-modulo piatto.*

Esercizio 2.64. *Si trovino altri esempi di funtori non piatti su A.*

Esercizio 2.65. *Sia $(M_i)_{i\in I}$ una collezione di A-moduli e denotiamo con M la loro somma diretta. Allora M è piatto se e solo se ogni M_i è piatto.*

Esercizio 2.66. *Se $P \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ è proiettivo, allora è piatto.*

Proposizione 2.67. *Sia* $N \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(1) *N è piatto su A.*
(2) *Per ogni successione esatta della forma*
$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$
anche la successione
$$0 \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N \longrightarrow 0$$
è esatta.
(3) *Se $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M, M')$ è iniettiva, allora anche $f \otimes \mathbf{1}_N \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M' \otimes N, M \otimes N)$ è iniettiva.*
(4) *Se $M, M' \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ sono finitamente generati ed $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M', M)$ è iniettiva, allora anche $f \otimes \mathbf{1}_N \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M' \otimes N, M \otimes N)$ è iniettiva.*

Dimostrazione. **(1) $\Rightarrow$ (2):** Segue dall'osservazione che ogni successione esatta fornisce una collezione di successioni esatte corte.

(2) $\Rightarrow$ (1): Segue dal fatto che se abbiamo due successioni esatte
$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} N \longrightarrow 0 \qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M_3 \xrightarrow{f_3} M_4$$
con N sottomodulo di M_3 e i il morfismo di inclusione, la successione
$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} M_4$$
è a sua volta esatta.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Viene dal fatto (cf. Corollario 2.60) che $\cdot \otimes N$ è esatto a destra.

(3) $\Rightarrow$ (4): Ovvia

(3) $\Leftarrow$ (4): Questa è l'implicazione più interessante perché ci dice che basta verificare l'esattezza su moduli finitamente generati.

Sia dunque $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M', M)$ un omomorfismo iniettivo. Assumiamo (4) e vogliamo dimostrare che anche $f \otimes \mathbf{1}_N \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M' \otimes N, M \otimes N)$ è iniettiva. Sia $u \in \mathrm{Ker}(f \otimes \mathbf{1}_N)$. Allora possiamo scrivere $u = \sum (m_i' \otimes n_i)$ per opportuni $m_i' \in M'$ e $n_i \in N$. Valutando $f \otimes \mathbf{1}_N$, otteniamo:
$$(f \otimes \mathbf{1}_N)(m_i' \otimes n_i) = f(m_i') \otimes n_i = 0.$$
Consideriamo ora M_0' il sottomodulo di M' generato dall'insieme (finito) (m_i') e la sua immagine $M_0 := f(M_0') \subseteq M$. Questo è un sottomodulo finitamente generato di M. Consideriamo inoltre la restrizione $f_0 := f_{|M_0'} : M_0' \to M_0$. Otteniamo allora un morfismo tra moduli finitamente generati:
$$f_0 \otimes \mathbf{1}_N : M_0' \otimes N \to M \otimes N$$
tale che $f_0(u) = 0$. Ma per (4) questo implica $u = 0$, come volevamo. □

3. Algebre su anelli commutativi

3.1. **Prime definizioni e primi esempi.** Vogliamo adesso rilassare l'ipotesi di associatività che richiediamo agli anelli.

Come già precedentemente, quando consideriamo l'immagine $U(X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ins})$ di $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$, ometteremo di scrivere il funtore dimenticante e denoteremo la sua immagine semplicemente con X.

Definizione 3.1. *Sia A un anello commutativo unitario. Una A-algebra X è il dato di*

- $X \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$*;*
- *un'applicazione A-bilineare*

$$\mu_X \in \mathbf{Ins}(X \times X, X), \quad \mu_X(x,y) \mapsto xy.$$

Nella notazione, ometteremo nella maggior parte dei casi l'applicazione bilineare μ_X e scriveremo semplicemente X anziché (X, μ_X).

Definizione 3.2. *Siano X, Y due A-algebre. Un omomorfismo di A-algebre è un morfismo $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(X,Y)$ che sia compatibile con le due applicazioni A-bilineari:*

$$f(\mu_X(x_1x_2)) = \mu_Y(f(x_1), f(x_2)),$$

che scritto in modo meno pedante non è altro che l'uguaglianza:

$$f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2).$$

Definizione 3.3. *La categoria $\mathbf{A}-\mathbf{Alg}$ delle A-algebre è la categoria i cui oggetti sono A-algebre e i morfismi sono omomorfismi di A-algebre.*

Esercizio 3.4. *Verificare che tutti gli assiomi di categoria sono verificati.*

Definizione 3.5. *Sia $X \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Alg})$. Allora X è detta*

- commutativa *se $xy = yx$ per ogni $x, y \in X$;*
- unitaria *se esiste un elemento $e \in X$ tale che $ex = xe = x$ per ogni $x \in X$;*
- associativa *se $(xy)z = x(yz)$ per ogni $x, y, z \in X$.*

Osservazione 3.6. *In* [1] *un'A-algebra è sempre ottenuta come $Res^f B$, per un opportuno morfismo $f \in \mathbf{CRing}(A,B)$. Pertanto in* [1]*, tutte le algebre sono associative, commutative ed unitarie. Questo è per noi troppo restrittivo, poiché vogliamo essere in grado di parlare di algebre di Lie, per le quali tutte queste caratteristiche falliscono.*

In [5]*, A-algebre sono introdotte in generale, ma poi ci si restringe al caso associativo ed unitario.*

Esempio 3.7.
- *Siano $A, B \in Ob(\mathbf{CRing})$ e sia $f \in \mathbf{CRing}(A,B)$. Allora sappiamo che B ammette una struttura di A-modulo (che abbiamo denotato $Res^f B$) e la moltiplicazione in B rende B una A-algebra (associativa, commutativa ed unitaria).*

- *Sia* $A \in \mathbf{CRing}$, $B \in \mathbf{Ring}$ *ed* $f \in \mathbf{Ring}(A, B)$ *tale che* $f(A)$ *è contenuto nel centro* $Z(B)$ *di* B. *Allora possiamo definire (esattamente come nel caso precedente) una struttura di* A*-modulo su* B

$$A \times B \to B, \qquad (a, b) \mapsto f(a)b$$

  e la moltiplicazione in B *è* A*-bilineare. Questo fa di* B *una* A*-algebra associativa ed unitaria.*
- *Sia* $B \in Ob(\mathbf{CRing})$. *Allora esiste un unico morfismo* $f \in \mathbf{CRing}(\mathbf{Z}, B)$. *Questo ci permette di definire un funtore*

$$F : \mathbf{CRing} \to \mathbb{Z} - \mathbf{Alg}.$$

  Esercizio: *Dimostrare che esso induce un'equivalenza di categorie tra* $\mathbf{CRing}$ *e* $\mathbb{Z} - \mathbf{Alg}^{c.u.a.}$, *dove* $\mathbb{Z} - \mathbf{Alg}^{c.u.a.}$ *è la sottocategoria di* $\mathbb{Z} - \mathbf{Alg}$ *i cui oggetti sono le* $\mathbb{Z}$*-algebre unitarie, associative e commutative.*
- *Sia* $A \in Ob(\mathbf{CRing})$ *e sia* $G \in Ob(\mathbf{Gr})$. *Possiamo allora considerare l'anello*

$$A[G] = \left\{ \sum_{\substack{a_g \in A \\ g \in G}} a_g g \mid \#\{a_g \neq 0\} < \infty \right\},$$

  dove le operazioni sono definite come:

$$\left(\sum a_g g\right) + \left(\sum b_g g\right) = \sum (a_g + b_g) g$$
$$\left(\sum a_g g\right) \cdot \left(\sum b_g g\right) = \sum_g (\sum_{hk=g} a_h b_k) g$$

  Si vede immediatamente che $A[G]$ *è una* A*-algebra associativa ed unitaria ma non commutativa. Notiamo che vi è un morfismo* $A \to A[G]$ *dato da* $a \mapsto ae$, *che manda dunque* A *nel centro di* $A[G]$. *Dunque questo non è altro che un caso particolare del secondo esempio di questa lista.*
- *Sia* $A \in Ob(\mathbf{CRing})$. *Allora* $A[x_1, x_2, \dots x_n]$ *è una* A*-algebra.*

3.2. **Algebre di Lie.** Vediamo ora finalmente una classe di algebre che non sono associative.

Definizione 3.8. *Sia* $A \in Ob(\mathbf{CRing})$ *e sia* $\mathfrak{g} \in Ob(\mathbf{A - Alg})$. *Denotiamo con*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (x, y) \mapsto [x, y]$$

la legge di composizione. Allora $\mathfrak{g}$ *è* un'algebra di Lie *se valgono le seguenti proprietà:*

(L1): $[x, x] = 0$*per ogni* $x \in \mathfrak{g}$*;*
(L2): $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]] = 0$ *per ogni* $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Osservazione 3.9. *Se A è privo di 2-torsione, ovvero se $x+x \neq 0$ per ogni $x \in A$, allora possiamo sostituire (L1) con*

$$\textbf{\textit{(L1')}} \quad [x,y] = -[y,x] \quad \text{per ogni } x, y \in \mathfrak{g}$$

e vediamo che (L2) ci dice:

$$[[x,y],z] - [x,[y,z]] = -[[z,x],y]]$$

per ogni $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Siccome $[[z,x],y]]$ non è necessariamente nullo, ne deduciamo che $\mathfrak{g}$ in generale non è associativa.

Esercizio 3.10. *Sia $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ il $\mathbb{C}$-modulo delle matrici $n \times n$ a coefficienti complessi. Si dimostri che la legge di composizione*

$$[\cdot,\cdot] : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \times M_{n\times n} \to M_{n\times n}(\mathbb{C}), \quad (A,B) \mapsto AB - BA,$$

fornisce a $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ una struttura di algebra di Lie.

3.3. **Costruzioni.**

3.3.1. *Sottoalgebre e ideali.*

Definizione 3.11. *Sia $X \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Alg})$. Una* sottoalgebra *$W \subseteq X$ è un A-sottomodulo che sia stabile rispetto alla legge di composizione, cioè tale che $\mu_X(W \times W) \subseteq W$.*

Esempio 3.12.
- *Sia $X \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Alg})$, il suo centro*

$$Z(X) = \{z \in X \mid zx = xz \text{ per ogni } x \in X\}$$

  è una sottoalgebra.
- *Siano $X, Y \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Alg})$ e sia $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Alg}(X,Y)$. Allora il nucleo $Kerf$, rispettivamente l'immagine $Im(f)$ sono sottoalgebre di X, rispettivamente Y.*

Definizione 3.13. *Sia $X \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Alg})$.*

- *Un* ideale sinistro*, rispettivamente* destro*, di A è una A-sottoalgebra I di X tale che $XI \subseteq I$, rispettivamente $IX \subseteq I$.*
- *Una A-sottoalgebra I di X è detta* ideale *se è un ideale destro e sinistro di X.*

Esempio 3.14. *Siano $X, Y \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Alg})$ e sia $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Alg}(X,Y)$. Allora il nucleo $Kerf$ è un ideale: se $x \in Ker(f)$, allora per ogni $x' \in X$ si ha che $f(x'x) = f(x')f(x) = 0 = f(x)f(x') = f(xx')$.*

3.3.2. *Algebre quoziente.*

Definizione 3.15. *Sia $X \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Alg})$ e sia $I \subseteq X$ un ideale di X. Allora l'*algebra quoziente *è il dato dell'A-modulo X/I con legge di composizione data da*

$$X/I \times X/I \to X/I, \quad (x+I, y+I) \mapsto (xy+I).$$

Osserviamo che il morfismo quoziente canonico $\pi \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(X, X/I)$ è compatibile con la struttura di A-algebra appena definita su X/I.

In particolare, poiché per ogni $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Alg}(X,Y)$ il nucleo è un ideale, se I è un ideale tale che $I \subseteq \ker(f)$, allora esiste un unico morfismo $\overline{f} \in \mathbf{A}-\mathbf{Alg}(X/I, Y)$ tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & X/I \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Ne deduciamo (**Esercizio**:verificarne i dettagli) che vale l'isomorfismo $\mathrm{Im}(f) \simeq X/\mathrm{Ker}(f)$.

3.3.3. *Prodotto tensoriale di algebre associative.* Siano $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{\mathrm{a}})$ (algebre associative). Poiché esse sono in particolare degli A-moduli, ne possiamo formare il prodotto tensoriale $X \otimes_A Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$. Vogliamo far vedere che ammette una struttura di A-algebra, ovvero che possiamo definire una legge di composizione che sia A-bilineare.

Notiamo che per ogni elemento $(x,y) \in X \otimes Y$ possiamo definire una funzione A-bilineare $\mu_{(x,y)} \in \mathbf{Ins}(X \times Y, X \otimes Y)$ come

$$\mu_{x,y} : X \times Y \to X \otimes Y, \quad (z,w) \mapsto (xz) \otimes (yw)$$

Dalla proprietà universale del prodotto tensoriale, abbiamo che tale morfismo induce un (unico) morfismo di A-moduli $\overline{\mu_{(x,y)}} \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(X \otimes Y, X \otimes Y)$ tale che $\overline{\mu_{(x,y)}}(z \otimes w) = (xz) \otimes (yw)$. Ma notiamo che questo morfismo è A-bilineare in (x,y) e pertanto esiste un unico morfismo A-bilineare

$$(X \otimes Y) \times (X \otimes Y) \to X \otimes Y, \quad (x \otimes y, z \otimes w) \mapsto (xz) \otimes (yw).$$

Poiché abbiamo supposto che X e Y fossero associative, anche $X \otimes Y$ con questa struttura di A-algebra lo è.

Osserviamo che se X ed Y sono A-algebre commutative con unità, anche il loro prodotto tensoriale è tale. Il seguente risultato ci dice che in $\mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{c.u.a.}$ vi sono coprodotti.

Proposizione 3.16. *Siano $B, C \in \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{c.u.a.}$. Allora $(B \otimes C, \iota_B, \iota_C,)$, con $\iota_B(b) = b \otimes 1$ e $\iota_C(c) = 1 \otimes c$, è un coprodotto in $\mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{c.u.a.}$*

Dimostrazione. Supponiamo vi sia un oggetto $D \in \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{\mathrm{c.u.a.}}$ e dei morfismi $\varphi \in \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{c.u.a.}(B,D)$ e $\psi \in \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{\mathrm{c.u.a.}}(C,D)$ tali che in seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} & B \otimes C & \\ B \arrow[ur] \arrow[dr, "\varphi"] & & C \arrow[ul] \arrow[dl, "\psi"'] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Questo ci permette di definire una funzione A-bilineare

$$f : B \times C \to D, \quad (b, c) \mapsto \varphi(b)\psi(c)$$

e per la proprietà universale del prodotto tensoriale sappiamo che esiste un unico morfismo di A-moduli $\overline{f} \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(B \otimes C, D)$ che rende il seguente diagramma (per ora solo di A-moduli) commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & B \otimes C \arrow[dd, "f"] & \\
B \arrow[ur] \arrow[dr, "\varphi"'] & & C \arrow[ul] \arrow[dl, "\psi"] \\
 & D &
\end{tikzcd}$$

Per quanto osservato prima, questo morfismo possiamo vederlo come un morfismo di A-algebre commutative unitarie, poiché vale:

$$f(bb', cc') = \varphi(b)\varphi(b')\psi(c)\psi(c') = (\varphi(b)\psi(c))(\varphi(b')\psi(c')) = f((b, c))f(b', c')$$

e quindi

$$f((b \otimes c)(b' \otimes c')) = f(b \otimes c)f(b' \otimes c').$$

A questo punto vediamo subito che il diagramma commuta anche in $\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{c.u.a.}$.

$\square$

3.3.4. *Algebra tensoriale e algebra simmetrica su un modulo.*

Definizione 3.17. *Sia $(\Gamma, +)$ un monoide, A un anello commutativo unitario e $X \in Ob(\mathbf{A} - \mathbf{Alg})$. Allora diciamo che X è una A-*algebra Γ-graduata *se*

- *esistono $X_\gamma \in Ob(\mathbf{A} - \mathbf{Mod})$, $\gamma \in \Gamma$, tali che $X = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ (nella categoria degli A-moduli),*
- *$X_{\gamma_1} X_{\gamma_2} \subseteq X_{\gamma_1 + \gamma_2}$ per ogni $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.*

Definizione 3.18. *Siano X e Y due A-algebre Γ-graduate. Allora un omorfismo $f : X \to Y$ di A-algebre Γ-graduate è un omomorfismo di A-algebre che preserva la gradazione: $f(X_\gamma) \subseteq Y_\gamma$ per ogni $\gamma \in \Gamma$.*

Denotiamo con $\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^\Gamma$ la sottocategoria di $\mathbf{A} - \mathbf{Alg}$ i cui oggetti sono le A-algebre Γ-graduate con morfismi gli omomorfismi appena definiti.

Nel resto della sezione costruiremo un funtore $T : \mathbf{A} - \mathbf{Mod} \to \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathbb{Z}}$.

Sia $M \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}$. Iniziamo costruendo un funtore $T^r : \mathbf{A} - \mathbf{Mod} \to \mathbf{A} - \mathbf{Mod}$ per ogni $r \in \mathbb{Z}$. Sia dunque $r \in \mathbb{Z}$, definiamo:

$$T^r(M) := \begin{cases} (0) & \text{se } r < 0 \\ A & \text{se } r = 0 \\ \underbrace{M \otimes M \otimes \ldots \otimes M}_{r} & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$$

Inoltre, per ogni $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,N)$, ed ogni $r \in \mathbb{Z}$ definiamo $T^r(f) \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(T^rM, T^rN)$ come

$$T^r(f) \begin{cases} 0 & \text{se } r < 0 \\ \mathbf{1}_A & \text{se } r = 0 \\ \underbrace{f \otimes f \otimes \ldots \otimes f}_{r} & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$$

Notiamo ora che dall'associatività del prodotto tensoriale segue che abbiamo un'applicazione bilineare:

$$T^r(M) \times T^s(M) \to T^{r+s}(M).$$

Questo ci permette di definire una struttura di anello unitario (con unità $\mathbf{1}_A$) sulla somma diretta

$$T(M) := \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} T^r(M).$$

Inoltre, poiché $T^0(M) = A$, abbiamo un morfismo di inclusione

$$f : A \hookrightarrow T(M)$$

tale che, seppure $T(M)$ non è generalmente commutativo, $f(A) \in Z(T(M))$ e questo, per quanto osservato precedentemente, induce una struttura di A-algebra (associativa unitaria) su $T(M)$.

Per quanto riguarda i morfismi, per ogni $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,N)$, definiamo $T(f) \in \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{\mathbb{Z}}$ come l'unico morfismo di A-algebre tale che $T(f)(m_1 \otimes m_2 \otimes \ldots \otimes m_r) = f(m_1) \otimes f(m_2) \otimes \ldots \otimes f(m_r)$. Questo è effettivamente un morfismo, in quanto $T(M)$ è generato in grado 1 come A-algebra.

A questo punto abbiamo ottenuto un funtore (**Esercizio:** verificare!) $T : \mathbf{A}-\mathbf{Mod} \to \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{\mathbb{Z}}$.

Esercizio 3.19. *Sia $M \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ libero e finitamente generato e sia $(m_i)_{i=1,\ldots,n}$ una base per M. Per ogni collezione $\underline{i} = (i_j)_{j=1,\ldots,r}$ con $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots i_r \leq n$, denotiamo $m_{\underline{i}} := m_{i_1} \otimes m_{i_2} \otimes \ldots \otimes m_{i_r}$. Dimostrare che ogni elemento $x \in T(M)$ ammette un'unica scrittura*

$$\sum_{a_{\underline{i}} \in A} a_{\underline{i}} m_{\underline{i}},$$

dove $\underline{i}$ varia nell'insieme dei vettori a coefficienti in $\{1, \ldots, n\}$ ad un qualunque numero di entrate.

Notiamo che $T(M)$ gode della seguente proprietà universale: sia $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{u.a.})$ e sia $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,X)$. Allora esiste un unico morfismo $\overline{f} \in \mathbf{A}-\mathbf{Alg}(T(M), X)$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "f"'] & T(M) \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

dove $\iota_M : M \to T(M)$ è l'inclusione $T^1(M) = M \to \bigoplus T^r(M)$.

Lemma 3.20. *Il funtore T è aggiunto sinistro del funtore dimenticante*

$$U : \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{u.a.} \to \mathbf{A} - \mathbf{Mod}.$$

Dimostrazione. □

3.4. Algebra simmetrica di un A-modulo.

Definizione 3.21. *Siano $M, N \in Ob(\mathbf{A} - \mathbf{Mod})$. Un'applicazione r-multilineare $f \in \boldsymbol{Ins}(\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{r}, N)$ si dice simmetrica se*

$$f(m_1, m_2, \ldots, m_r) = f(m_{\sigma(1)}, m_{\sigma(2)}, \ldots, m_{\sigma(r)})$$

per ogni permutazione $\sigma \in S_r$.

Sia $r \geq 2$. Consideriamo in $T^r(M)$ il sottomodulo

$$I_r := (m_1 \otimes m_2 \otimes \ldots \otimes m_r - m_{\sigma(1)} \otimes m_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes m_{\sigma(r)} \mid m_i \in M,\ \sigma \in S_r)$$

($I_r = (0)$ se $r \leq 1$).

Definizione 3.22. *I* tensori simmetrici omogenei di grado *r sono gli elementi di $S^r := T^r(M)/I_r$.*

Notiamo che $I = \bigoplus I_r$ è un ideale dell'algebra tensoriale $T(M)$ e così $S(M) := T(M)/I = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} S^r(M)$ eredita una struttura di A-algebra associativa unitaria $\mathbb{Z}$-graduata.

Definizione 3.23. *$S(M)$ si dice* algebra simmetrica *di M.*

Notiamo che per ogni $N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} - \mathbf{Mod})$ e per ogni $f \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}$, il morfismo di algebre $\mathbb{Z}$-graduate (associative unitarie) $T(f) \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathbb{Z},u.a.}(T(M), T(N))$ è tale che $T(f)(x \otimes y - y \otimes x) = f(x) \otimes f(y) - f(y) \otimes f(x)$ e quindi induce un (unico) morfismo di algebre commutative $S(f) \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathbb{Z},c.u.a.}(S(M), S(N))$.
Otteniamo così un funtore

$$S : \mathbf{A} - \mathbf{Mod} \to \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathbb{Z},c.u.a.}$$

3.4.1. *Proprietà universale dell'algebra simmetrica.* L'algebra simmetrica $S(M)$ gode della seguente proprietà universale: sia $N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathbb{Z},c.u.a.})$ e sia $f \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(M, N)$; allora esiste un unico morfismo $\overline{f} \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathbb{Z},c.a.u.}(S(M), S(N))$ che rende il seguente diagramma di moduli commutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & S(M) \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Esercizio 3.24. *Dimostrare che il funtore $S : \mathbf{A} - \mathbf{Mod} \to \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathbb{Z},c.u.a.}$ è aggiunto a sinistra del funtore dimenticante*

$$U : \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathbb{Z},c.u.a.} \to \mathbf{A} - \mathbf{Mod}.$$

Proposizione 3.25. *Sia $M \in Ob(\mathbf{A-Mod})$ libero e finitamente generato e sia $(m_1, \dots, m_n)$ una base di M. Allora vi è un isomorfismo $\widetilde{\phi} \in \mathbf{A-Alg}^{\mathbb{Z},c.u.a.}(S(M), A[x_1, \dots, x_n])$.*

Dimostrazione. Denotiamo con

$$P_r := \{f \in A[x_1, \dots, x_n] \mid f \text{ omogeneo, } \deg(f) = r\}$$

e consideriamo l'applicazione

$$\varphi_r : \underbrace{M \times M \times \dots M}_{r} \to P_r$$

data da $\varphi_r((\sum_i a_i^j m_i)_j) = \prod_j (\sum a_i^j x_i)$. Chiaramente φ è multilineare e dunque possiamo considerare il morfismo indotto $\overline{\varphi} \in \mathbf{A-Mod}(\underbrace{M \otimes M \otimes \dots \otimes M}_{r}, P_r)$.

D'altronde $I_r \subseteq \mathrm{Ker}\overline{\varphi}$ poiché R_r è abeliano e dunque (per la proprietà universale del quoziente) c'è un unico morfismo $\widetilde{\varphi} \in \mathbf{A-Mod}(S^r(M), P_r)$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} M \otimes M \otimes \dots \otimes M \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\varphi_r}"'] & S(M) \arrow[dl, "\widetilde{\varphi_r}"] \\ P_r & \end{tikzcd}$$

e manda $m_{i_1} \otimes \dots \otimes m_{i_r}$ in $x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_r}$. Poiché esse sono basi dei due moduli, (dalla proprietà universale dei moduli finitamente generati) abbiamo un isomorfismo di A-moduli. Per concludere che esso induce un isomorfismo a livello di algebre

$$\widetilde{\varphi} : S(M) = \bigoplus S^r(M) \to \bigoplus P_r = A[x_1, \dots, x_n]$$

basta notare che la moltiplicazione in $S(M)$ corrisponde alla moltiplicazione in $A[x_1, \dots, x_n]$. $\square$

3.5. **Algebra inviluppante universale.** Denotiamo con $\mathbf{A-Alg}^{\mathrm{Lie}}$ la categoria delle A-algebre di Lie.

Definizione 3.26. *Sia $\mathfrak{g} \in Ob(\mathbf{A-Alg}^{Lie})$. Un'*algebra inviluppante universale di *$\mathfrak{g}$ è il dato di*

- *un'algebra $\mathfrak{U} \in \mathbf{A-Alg}^{a.u.}$,*
- *un morfismo $i \in \mathbf{A-Mod}(\mathfrak{g}, \mathfrak{U})$ tale che*

$$i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x) \tag{10}$$

e avente la seguente proprietà universale: per ogni $\mathfrak{V} \in \mathbf{A-Alg}^{a.u.}$ e per ogni $j \in \mathbf{A-Mod}(\mathfrak{g}, \mathfrak{V})$ soddisfacente (10) *esiste un unico morfismo $\overline{j} \in \mathbf{A-Alg}^{a.u.}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ che rende il seguente diagramma* *commutativo:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & \mathfrak{U} \arrow[dl, "\overline{j}"] \\ \mathfrak{V} & \end{tikzcd}$$

Il prossimo risultato ci dice che l'algebra inviluppante universale di un'algebra di Lie, se esiste, è unica a meno di isomorfismo.

Lemma 3.27. *Siano* $(\mathfrak{U}, i)$ *e* $(\mathfrak{U}', i')$ *due algebre inviluppanti universali per* $\mathfrak{g}$*. Allora vi è un unico isomorfismo* $\psi \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{u.a.}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ *che rende il seguente diagramma commutativo:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i'"'] & \mathfrak{U} \arrow[dl, "\psi"] \\ \mathfrak{U}' & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Come al solito, si tratta di applicare quattro volte la proprietà universale:

(1) Vi è un unico morfismo $\overline{i'} \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathrm{u.a.}}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i'"'] & \mathfrak{U} \arrow[dl, "\overline{i'}"] \\ \mathfrak{U}' & \end{tikzcd}$$

(2) Vi è un unico morfismo $\overline{i'} \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathrm{u.a.}}(\mathfrak{U}', \mathfrak{U})$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "i"'] & \mathfrak{U}' \arrow[dl, "\overline{i}"] \\ \mathfrak{U} & \end{tikzcd}$$

(3) Vi è un unico morfismo $\overline{j} \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathrm{u.a.}}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & \mathfrak{U} \arrow[dl, "\overline{j}"] \\ \mathfrak{U} & \end{tikzcd}$$

Ma poiché $\mathbf{1}_{\mathfrak{U}}$ e $\overline{i'} \circ \overline{i}$ rendono entrambi tale diagramma commutativo, devono coincidere.

(4) Vi è un unico morfismo $\overline{j'} \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\text{u.a.}}(\mathfrak{U}', \mathfrak{U}')$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & \mathfrak{U} \arrow[dl, "\overline{j}"] \\ \mathfrak{U} & \end{tikzcd}$$

Ma poiché $\mathbf{1}'_{\mathfrak{U}}$ e $\overline{i} \circ \overline{i'}$ rendono entrambi tale diagramma commutativo, devono coincidere ed il ψ cercato non è altro che $\overline{i'}$.

□

A questo punto è lecito chiederci se tale algebra esiste. Il lemma seguente risponde positivamente a questa domanda:

Lemma 3.28. *Per ogni $\mathfrak{g} \in Ob(\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{Lie})$ esiste un'algebra universale inviluppante.*

Dimostrazione. Realizzeremo l'algebra cercata come un quoziente dell'algebra tensoriale $T(\mathfrak{g})$. Sia dunque $J \subseteq T(\mathfrak{g})$ l'ideale generato dagli elementi

$$\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g}\}$$

Poniamo $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/J \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{a.u.})$. Poichè $T^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \subseteq T(\mathfrak{g})$, possiamo definire $i := \pi_{|\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})/J$, dove $\pi : T(\mathfrak{g}) \to T(\mathfrak{g})/J$. Dobbiamo ora verificare che valgano tutte le proprietà richieste.

Sia dunque $\mathfrak{V} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{a.u.})$ e $j \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}(\mathfrak{g}, \mathfrak{V})$ tale che vale (10). Per la proprietà universale del funtore T, abbiamo un unico morfismo $\widetilde{j} \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{a.u.}$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} = T^1(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & T(\mathfrak{g}) \arrow[dl, "\widetilde{j}"] \\ \mathfrak{V} & \end{tikzcd}$$

Poiché j per ipotesi verifica (10), ogni elemento$x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ (per $x, y \in \mathfrak{g}$) è contenuto nel nucleo $\mathrm{Ker}(\widetilde{j})$ e pertanto $J \subseteq \mathrm{Ker}(\widetilde{j})$ ed esiste un unico morfismo $\overline{j} \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{u.a.}(T(\mathfrak{g})/J, \mathfrak{V})$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & T(\mathfrak{g})/J \arrow[dl, "\overline{j}"] \\ \mathfrak{V} & \end{tikzcd}$$

□

Esempio 3.29. *Se $\mathfrak{g}$ è abeliana, ovvero tale che $[x, y] = 0$ per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$, allora $J = (x \otimes y - y \otimes x) = \bigoplus I_r$ e pertanto $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$.*

3.5.1. *Un'aggiunzione.* . Definiamo un funtore

$$\mathcal{L} : \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{u.a.} \to \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathrm{Lie}}$$

che al livello di oggetti prende un'algebra $X \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{u.a.}$ con moltiplicazione μ_X e la manda nell'algebra di Lie $(X, [\cdot,\cdot])$ con

$$[\cdot,\cdot] : X \times X \to X, \quad (x,y) \mapsto \mu_X(x,y) - \mu_X(y,x).$$

D'altronde, per quanto abbiamo discusso, possiamo definire un funtore

$$\mathfrak{U} : \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathrm{Lie}} \to \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{u.a.}$$

che a livello di oggetti manda $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J$.

Esercizio 3.30. *Dimostrare che $\mathfrak{U}$ è aggiunto sinistro di $\mathcal{L}$.*

3.6. **Il teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt.** Lo scopo di questa sezione è quello di studiare la struttura di $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J$. Più precisamente, faremo vedere che se la A-Lie algebra $\mathfrak{g}$ è libera su A la sua algebra inviluppante ha un comportamento simile ad un'algebra di polinomi.

Osserviamo prima di tutto che per il momento sappiamo solo che $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ contiene (una copia isomorfa di) $A = T^0(\mathfrak{g})$: basta notare che $J \subseteq \bigoplus_{r\geq 1} T^r(\mathfrak{g})$.

Cominciamo introducendo la nozione di algebra **Z**-filtrata e della corrispondente algebra graduata associata.

Definizione 3.31. *Sia $X \in Ob(\mathbf{A} - \mathbf{Alg})$. Una ($\mathbb{Z}$)-*filtrazione *di X è una collezione $(X_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ di sottomoduli tali che*

- *$X_r \subseteq X_{r+1}$ per ogni $r \in \mathbb{Z}$;*
- *$\bigcup_{r\in\mathbb{Z}} X_r = X$;*
- *$X_r X_s \subseteq X_{r+s}$.*

Esempio 3.32. *(**Esercizio:** Verificare che gli esempi della seguente lista sono effettivamente filtrazioni.)*

- *Sia $\mathfrak{g} \in Ob(\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{Lie})$. Definiamo una filtrazione sull'algebra tensoriale $T(\mathfrak{g})$ come segue:*

$$T(\mathfrak{g})_r := \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}_{\leq r}} T^s(\mathfrak{g}) \quad (r \in \mathbb{Z}).$$

- *La filtrazione su $T(\mathfrak{g})$ induce una filtrazione sull'algebra inviluppante universale. Se denotiamo con π il morfismo canonico $\pi : T(\mathfrak{g}) \to T(\mathfrak{g})/J$, allora*

$$U_r := \mathfrak{U}(\mathfrak{g})_r = \pi(T(\mathfrak{g})_r) \quad (r \in \mathbb{Z}).$$

- *Consideriamo ora l'algebra simmetrica $S(\mathfrak{g})$. Allora la filtrazione sull'algebra tensoriale ne induce una su $S(\mathfrak{g})$ data da:*

$$S(\mathfrak{g})_r = \bigoplus_{s\leq r} S^s(\mathfrak{g}) \quad (r \in \mathbb{Z}).$$

Se identifichiamo $S(\mathfrak{g})$ con un'algebra polinomiale $A[x_1, x_2, \ldots]$, allora tale filtrazione corrisponde a

$$A[x_1, x_2, \ldots]_r = \{f \in A[x_1, x_2, \ldots] \mid deg(f) \leq r\} \quad (r \in \mathbb{Z}).$$

Definizione 3.33. *Sia $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ una filtrazione dell'A-algebra $X \in Ob(\mathbf{A} - \mathbf{Alg})$. L'algebra graduata associata $gr_{(X_r)}X \in Ob(\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathbb{Z}})$ è l'algebra $\mathbb{Z}$-graduata data dal modulo*

$$gr_{(X_i)}X = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} X_r/X_{r-1}$$

e legge di composizione univocamente determinata da

$$(x + X_{r-1})(y + X_{s-1}) = xy + X_{r+s-1}, \quad x \in X_r,\ y \in X_s.$$

Osservazione 3.34. *Tale legge di composizione è ben definita poiché, se $x \in X_r$ e $y \in X_s$,*

$$(x + X_{r-1})(y + X_{s-1}) = xy + xX_{s-1} + yX_{r-1} + X_{r-1}X_{s-1}$$

Per concludere basta usare il fatto che (X_r) sia una filtrazione di X e pertanto

$$xX_{s-1} \subseteq X_{r+s-1},\ yX_{r-1} \subseteq X_{s+r-1},\ X_{r-1}X_{s-1} \subseteq X_{r+s-2}$$

che implica

$$(x + X_{r-1})(y + X_{s-1}) = xy + X_{r+s-1}.$$

D'ora in avanti ci concentreremo sull'algebra $\mathrm{gr}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) := \mathrm{gr}_{(U_r)_{r\in\mathbb{Z}}}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Osserviamo prima di tutto che essa è unitaria ed associativa, cioè $\mathrm{gr}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} - \mathbf{Alg})^{\mathbb{Z},u.a.}$. Il prossimo lemma ci dice che è inoltre commutativa.

Sia $\varphi_r \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(T^r(\mathfrak{g}), U_i/U_{i-1})$ definito come la composizione:

$$T^r(\mathfrak{g}) \longrightarrow T(\mathfrak{g})_r \xrightarrow{\pi_{|T(\mathfrak{g})_r}} U_r \longrightarrow U_r/U_{r-1},$$

dove l'ultimo morfismo è il morfismo quoziente canonico.

Il morfismo di A-moduli φ_r è suriettivo poiché

$$\pi(T_r(\mathfrak{g}) - T_{r-1}(\mathfrak{g})) = U_r - U_{r-1}.$$

Ricordiamo che abbiamo denotato con $I \subseteq T(\mathfrak{g})$ l'ideale generato dagli elementi $x \otimes y - y \otimes x$ al variare di x e y in $\mathfrak{g}$.

Lemma 3.35. *Sia $\varphi := (\varphi^r)_{r\in\mathbb{Z}}$. Allora:*

(1) $\varphi \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathbb{Z},u.a.}(T(\mathfrak{g}), gr\mathfrak{U}(\mathfrak{g}))$;
(2) $I \subseteq Ker\varphi$.

Dimostrazione. (1) Dobbiamo far vedere che φ è moltiplicativa. Siano dunque $x \in T^r(\mathfrak{g})$ e $y \in T^s(\mathfrak{g})$ (e quindi $xy \in T^{r+s}(\mathfrak{g})$), allora:

$$\varphi(xy) = \pi(xy) + U_{r+s-1} = \pi(x)\pi(y) + U_{r+s-1} = (\pi(x) + U_r)(\pi(y) + U_s) = \varphi(x)\varphi(y).$$

(2) Poiché I è generato da elementi del tipo $x\otimes y-y\otimes x$ per $x,y\in\mathfrak{g}$, per ottenere la tesi basta far vedere che $\varphi(x\otimes y-y\otimes x)=0$ in U_2/U_1. Ma questo segue immediatamente dal fatto che $\pi(x\otimes y-y\otimes x)=[x,y]\in U_1$.

$\square$

Il precedente lemma ci dice dunque che $\mathrm{gr}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})\in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{\mathbb{Z},c.u.a.})$ e, poiché $I\in\mathrm{Ker}(\varphi)$ implica (per la proprietà universale dell'applicazione quoziente) che esiste un unico morfismo (suriettivo) $\mu\in\mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{\mathbb{Z},c.u.a.}(S(\mathfrak{g}),\mathrm{gr}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}))$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} T(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & S(\mathfrak{g}) \arrow[dl, "\mu"] \\ \mathrm{gr}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) & \end{tikzcd} \tag{11}$$

Il teorema di Poincaré -Birkhoff-Witt ci dice che se $\mathfrak{g}$ ammette un insieme di generatori linearmente indipendenti (e totalmente ordinabili) come A-modulo, allora μè un isomorfismo.

Per il resto di questa sezione assumiamo che $\mathfrak{g}$ ammette una base (ordinata) come A-modulo.

Sia $(g_j)_{j\in J}$ una base ordinata per $\mathfrak{g}$.

Identifichiamo $S(\mathfrak{g})$ con l'algebra di polinomi $A[x_i\mid i\in J]$ e per una r-upla $\underline{i}=(i_1,\dots,i_r)$ denotiamo con $x_{\underline{i}}=x_{i_1}\dots x_{i_r}$. Per convenzione $x_\emptyset=1$.

Diciamo che una r-upla $\underline{i}$ di elementi in $\{x_i\mid i\in J\}$ è crescente se $i_k\leq i_{k+1}$ per ogni $k=1,\dots r-1$. Notiamo che $\emptyset$ è crescente poiché tale condizione è banalmente verificata.

Inoltre, dato un $j\in J$ ed una r-tupla $\underline{i}=(i_1,\dots,i_r)$ di elementi in $\{x_i\mid i\in J\}$, scriveremo $j\leq\underline{i}$ se $j\leq i_k$ per ogni $k=1,\dots r$. Osserviamo che $j\leq\emptyset$ per ogni $j\in J$ poiché, nuovamente, la condizione da verificare è vuota.

Lemma 3.36. (1) *Per ogni $r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, esiste un unico morfismo $f_r\in\mathbf{A}-\mathbf{Mod}(\mathfrak{g}\otimes S(\mathfrak{g})_r,S(\mathfrak{g}))$ tale che*
- **A_r:** *$f_r(g_j\otimes x_{\underline{i}})=x_jx_{\underline{i}}$ se $j\leq\underline{i}$ e $x_{\underline{i}}\in S(\mathfrak{g})_r$;*
- **B_r:** *$f_r(g_j\otimes x_{\underline{i}})-x_jx_{\underline{i}}\in S(\mathfrak{g})_h$ per ogni $h\leq r$, $x_{\underline{i}}\in S(\mathfrak{g})_h$;*
- **C_r:** *$f_r(g_j\otimes f_r(g_k\otimes x_{\underline{i'}}))=f_r(g_k\otimes f_r(g_j\otimes x_{\underline{i'}}))+f_r([g_j,g_k]\otimes x_{\underline{i'}}))$ per ogni $x_{\underline{i'}}\in S(\mathfrak{g})_{m-1}$*

(2) *Per ogni $m\in\mathbb{Z}$, f_{m-1} coincide con la restrizione di f_m a $\mathfrak{g}\otimes S(\mathfrak{g})_{m-1}$.*

Dimostrazione. **(2)** Segue immediatamente dall'unicità di f_{m-1} poiché la restrizione di f_m a $\mathfrak{g}\otimes S(\mathfrak{g})_{m-1}$ verifica $[A_{m-1}]$, $[B_{m-1}]$ e $[C_{m-1}]$.

(1) Procediamo per induzione su r. Per $r=0$, l'unica r-upla possibile è $\emptyset$, e pertanto dobbiamo considerare solo il caso $x_{\underline{i}}=x_\emptyset=1$. Imponendo la validità di $[A_m]$, abbiamo una sola possibilità per f_0:

$$f_0(g_j\otimes 1)=x_j\cdot 1=x_j.$$

Chiaramente, esso verifica $[B_0]$, poiché l'unico $h \leq 0$ in $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ è $h = 0$, per il quale vale già $[A_0]$:

$$f_0(g_j \otimes x_\emptyset) - x_j x_\emptyset = x_j - x_j = 0 \in S(\mathfrak{g})_0.$$

La proprietà $[C_0]$ è a questo punto una condizione vuota, poiché non abbiamo elementi della forma $x_{\underline{i}}$ in $S(\mathfrak{g})_r = (0)$ per $r < 0$.

Supponiamo ora che per ogni $h \leq r$ esista un'unica f_h con le proprietà richieste (quindi , in particolare, esiste f_{r-1}). Faremo vedere che possiamo estendere f_{r-1} ad f_r. Chiaramente, f_r è univocamente determinata dai valori $f_r(g_j \otimes x_{\underline{i}})$ con $j \in J$ e $\underline{i}$ una r-upla crescente, in quanto questi elementi sono una base per $\mathfrak{g} \otimes S(g)_r$. Pertanto, supponiamo $\underline{i}$ crescente.

Se $j \leq \underline{i}$, allora affinché valga $[A_r]$, deve essere

$$f_r(g_j \otimes x_{\underline{i}}) := x_j x_{\underline{i}}.$$

Se invece $j \not\leq \underline{i}$ allora il primo elemento di i, che denotiamo $k := i_1$ deve verificare $k \leq j$ (altrimenti, essendo $\underline{i}$ crescente, avremmo $j \leq \underline{i}$). Scriviamo ora $x_{\underline{i}} = x_k x_{\underline{i'}}$ con $\underline{i'} = (i_2, \ldots, i_r)$ e notiamo che, poiché $k \leq \underline{i'}$ abbiamo

$$f_m(g_k \otimes x_{\underline{i'}}) = x_k x_{\underline{i'}} = x_{\underline{i}},$$

pertanto $f_r(g_j \otimes f_r(g_k \otimes x_{\underline{i'}})) = f_r(g_j \otimes x_{\underline{i}})$. Ora imponiamo che valga $[C_r]$. Questo non ci lascerà alcuna libertà nella definizione di $f_m(g_j \otimes x_{\underline{i}})$:

$$\begin{aligned} f_r(g_j \otimes f_r(g_k \otimes x_{\underline{i'}})) &\overset{[C_r]}{=} f_r(g_k \otimes f_r(g_j \otimes x_{\underline{i'}})) + f_r([g_j, g_k] \otimes x_{\underline{i'}})) \\ &\overset{[B_{r-1}]}{=} f_r(g_k \otimes x_j x_{\underline{i'}}) + f_r(g_k \otimes w) \\ &\quad + f_r([g_j, g_k] \otimes x_{\underline{i'}})), \end{aligned}$$

dove $w \in S_{r-1}$. Ora, $k < (j, \underbrace{i_2, \ldots, i_r}_{\underline{i'}})$ e pertanto $f_r(g_k \otimes x_j x_{\underline{i'}}) = x_k x_j x_{\underline{i'}} = x_j x_{\underline{i}}$. Concludiamo che

$$f_r(g_j \otimes x_{\underline{i}}) = x_k x_j x_{\underline{i'}} + f_{r-1}(g_k \otimes w) + f_{r-1}([g_j, g_k] \otimes x_{\underline{i'}})).$$

Dunque abbiamo trovato un unico morfismo $f_r \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(\mathfrak{g} \otimes S(\mathfrak{g})_r, S(\mathfrak{g}))$ imponendo alcune delle condizioni. Facciamo vedere che valgono tutte.

Osserviamo che $[A_r]$ vale per come è abbiamo definito f_r. Per quanto riguarda $[B_r]$, è più debole di $[A_r]$ se $j \leq \underline{i}$, quindi dobbiamo solo verificare che valga nel caso in cui $j \not\leq \underline{i}$. Notiamo che basta mostrare la validità di $[B_r]$ solo per $k = r$, poiché se $k < r$, allora $[B_r]$ vale per induzione, poiché per il punto (2)(applicato $m - k$ volte), $f_{|\mathfrak{g} \otimes S(\mathfrak{g})_k}$ coincide con f_k. Abbiamo

$$\begin{aligned} f_r(g_j \otimes x_{\underline{i}}) = x_j x_{\underline{i}} &+ f_{r-1}(g_k \otimes w) + f_{r-1}([g_j, g_k] \otimes x_{\underline{i'}})) - x_j x_{\underline{i}} \\ &= f_{r-1}(g_k \otimes w) + f_{r-1}([g_j, g_k] \otimes x_{\underline{i'}})) \\ &\overset{[B_{r-1}]}{=} x_k w + [g_i, g_k] x_{\underline{i'}} + v, \end{aligned}$$

con $v \in B_{r-2}$. Dunque $[B_r]$ è verificata.

Ci concentriamo ora su $[C_r]$. Osserviamo prima di tutto che $[C_r]$ è banalmente vera se $j = k$ (poiché $[g_j, g_j] = 0$). Se $k < j$ e $k < \underline{i'}$, allora ci troviamo esattamente nelle ipotesi nelle quali eravamo quando abbiamo definito f_r e $[C_r]$ vale dunque automaticamente. Osserviamo che se scambiamo il ruolo di j e k in $[C_r]$, otteniamo un segno meno ovunque (dato che $[g_k, g_j] = -[g_j, g_k]$) e dunque dal caso precedente deduciamo che $[C_r]$ vale anche per $j < \underline{i'}$.

Rimane dunque da considerare il caso in cui $j \not\leq \underline{i'}$ e contemporaneamente $k \not\leq \underline{i'}$. In questo caso deve essere $l := i'_1 < j, k$ e $l \leq \underline{i''}$, con $\underline{i''} := (i'_2, \dots i'_{r-1})$. Cominciamo calcolando $f_r(g_j \otimes f_r(g_k \otimes x_{\underline{i'}}))$:

$$\begin{aligned} f_r(g_j \otimes f_r(g_k \otimes x_{\underline{i'}})) &= f_r(g_j \otimes f_{r-1}(g_k \otimes f_{r-1}(g_l \otimes x_{\underline{i''}}))) \\ &\overset{[C_{r-1}]}{=} f_r(g_j \otimes f_{r-1}(g_l \otimes f_{r-1}(g_k \otimes x_{\underline{i''}}))) \\ &\quad + f_r(g_j \otimes f_{r-1}([g_k, g_l] \otimes x_{\underline{i''}})). \end{aligned}$$

Se ci concentriamo ora sul primo addendo, possiamo applicare $[B_{r-2}]$ e trovare un $w \in S(\mathfrak{g})_{r-2}$ tale che

$$\begin{aligned} f_r(g_j \otimes f_{r-1}(g_l \otimes f_{r-1}(g_k \otimes x_{\underline{i''}}))) &\overset{[B_{r-1}]}{=} f_r(g_j \otimes f_{r-1}(g_l \otimes x_k x_{\underline{i''}})) + f_r(g_j \otimes f_{r-1}(g_l \otimes w)) \\ &\overset{[C_r]}{=} f_{r-1}(g_l \otimes f_{r-1}(g_j \otimes x_k x_{\underline{i''}})) + f_r([g_j, g_l] \otimes x_k x_{\underline{i''}}) \\ &\quad + f_r(g_j \otimes f_{r-1}(g_l \otimes w)) \end{aligned}$$

Abbiamo potuto applicare $[C_r]$ per ottenere la seconda uguaglianza poiché $l < (k, i'_2, \dots, i_{r-1})$ e in queste ipotesi abbiamo già dimostrato che $[C_r]$ è soddisfatto. Per induzione possiamo applicare $[C_{r-1}]$ a ciascuno dei tre termini e quindi possiamo applicare $[C_r]$ alla loro somma:

$$\begin{aligned} f_r(g_j \otimes f_r(g_k \otimes x_{\underline{i'}})) &= f_r(g_j \otimes f_{r-1}(g_l \otimes f_{r-1}(g_k \otimes x_{\underline{i''}}))) + f_r(g_j \otimes f_r([g_k, g_l] \otimes x_{\underline{i''}})) \\ &\overset{[C_r]}{=} f_r(g_l \otimes f_{r-1}(g_j \otimes f_{r-1}(g_k \otimes x_{\underline{i''}}))) + f_r([g_j, g_l] \otimes f_{r-1}(g_k \otimes x_{\underline{i''}})) \\ &\quad + f_{r-1}(g_j \otimes f_{r-1}([g_k, g_l] \otimes x_{\underline{i''}})) \\ &\overset{[C_{r-1}]}{=} f_r(g_l \otimes f_{r-1}(g_j \otimes f_{r-1}(g_k \otimes x_{\underline{i''}}))) + f_r([g_j, g_l] \otimes f_{r-1}(g_k \otimes x_{\underline{i''}})) \\ &\quad + f_r([g_k, g_l] \otimes f_{r-1}(g_j \otimes x_{\underline{i''}})) + f_{r-1}([g_j, [g_k, g_l]] \otimes x_{\underline{i''}}). \end{aligned}$$

Scambiando il ruolo di j e k si dimostra esattamente allo stesso modo che

$$\begin{aligned} f_r(g_k \otimes f_r(g_j \otimes x_{\underline{i'}})) &= f_r(g_l \otimes f_{r-1}(g_k \otimes f_{r-1}(g_j \otimes x_{\underline{i''}}))) + f_r([g_k, g_l] \otimes f_{r-1}(g_j \otimes x_{\underline{i''}})) \\ &\quad + f_r([g_j, g_l] \otimes f_{r-1}(g_k \otimes x_{\underline{i''}})) + f_{r-1}([g_k, [g_j, g_l]] \otimes x_{\underline{i''}}). \end{aligned}$$

Otteniamo allora

$$\begin{aligned}
&f_r(g_j \otimes f_r(g_k \otimes x_{\underline{i'}})) - f_r(g_k \otimes f_r(g_j \otimes x_{\underline{i'}}))\\
&\quad = f_r(g_l \otimes f_{r-1}(g_j \otimes f_{r-1}(g_k \otimes x_{\underline{i''}}))) + f_{r-1}([g_j,[g_k,g_l]] \otimes x_{\underline{i''}})\\
&\qquad - f_r(g_l \otimes f_{r-1}(g_k \otimes f_{r-1}(g_j \otimes x_{\underline{i''}}))) + f_{r-1}([g_k,[g_j,g_l]] \otimes x_{\underline{i''}})\\
&\quad = f_r(g_l \otimes f_{r-1}([g_j,g_k] \otimes x_{\underline{i''}}))\\
&\qquad + f_{r-1}([g_j,[g_k,g_l]] \otimes x_{\underline{i''}}) + f_{r-1}([g_k,[g_l,g_j]] \otimes x_{\underline{i''}})\\
&\quad \overset{C_{r-1}}{=} f_r([g_j,g_k] \otimes f_{r-1}(g_l \otimes x_{\underline{i''}})) + f_r([g_l,[g_j,g_k]] \otimes x_{\underline{i''}}))\\
&\qquad + f_{r-1}([g_j,[g_k,g_l]] \otimes x_{\underline{i''}}) + f_{r-1}([g_k,[g_l,g_j]] \otimes x_{\underline{i''}})\\
&\quad \overset{Jacobi}{=} f_r([g_j,g_k] \otimes f_{r-1}(g_l \otimes x_{\underline{i''}})).
\end{aligned}$$

□

Denotiamo con $\mathfrak{gl}(S(\mathfrak{g})) := \mathfrak{L}(\mathbf{A} - \mathbf{Mod}(S(\mathfrak{g}), S(\mathfrak{g})))$, ovvero l'algebra di Lie che si ottiene applicando il funtore $\mathfrak{L}$ all'algebra (associativa unitaria) degli endomorfismi di $S(\mathfrak{g})$ (come A-modulo).

Lemma 3.37. *Vi è un morfismo* $\rho \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathfrak{gl}(S(\mathfrak{g})))$ *tale che*

(1) $\rho(g_j)x_{\underline{i}} = x_j x_{\underline{i}}$ *se* $j \le \underline{i}$,
(2) $\rho(g_j)x_{\underline{i}} - x_j x_{\underline{i}} \in S(\mathfrak{g})_r$ *se* $\underline{i} = (i_1, \dots, i_r)$.

Dimostrazione. Il lemma precedente ci permette di definire un morfismo di A-moduli $f \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(\mathfrak{g} \otimes S(\mathfrak{g}), S(\mathfrak{g}))$. Tale morfismo induce un morfismo di A-moduli

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(S(\mathfrak{g}), S(\mathfrak{g})), \quad g_j \mapsto (x_{\underline{i}} \mapsto f(g_j \otimes x_{\underline{i}}))$$

che soddisfa (1) e (2) grazie alle proprietà $[A_r]$ e $[B_r]$.

Tale morfismo è inoltre un morfismo di algebre di Lie, poiché per ogni g_j, g_k, per ogni $x_{\underline{i}} \in S(\mathfrak{g})_{r-1}$ per $[C_r]$:

$$\begin{aligned}
\rho([g_j,g_k])(x_{\underline{i}}) &= f_r([g_j,g_k])(x_{\underline{i}})\\
&= f_r(g_j \otimes f_r(g_k \otimes x_{\underline{i}})) - f_r(g_k \otimes f_r(g_j \otimes x_{\underline{i}}))\\
&= (\rho(g_j) \circ \rho(g_k))(x_{\underline{i}}) - (\rho(g_k) \circ \rho(g_j))(x_{\underline{i}})\\
&= (\rho(g_j) \circ \rho(g_k) - \rho(g_k) \circ \rho(g_j))(x_{\underline{i}})
\end{aligned}$$

□

Nel seguente lemma usiamo la notazione

$$g_{\underline{i}} = g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_r} \quad \underline{i} = (i_! \dots, i_r)$$

Lemma 3.38. *Sia* $t \in T(\mathfrak{g})_r \cap J$ *e denotiamo con* t^r *la sua componente omogenea di grado* r. *Allora* $t^r \in I$.

Dimostrazione. Il lemma precedente ci ha permesso di definire un morfismo $\rho \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}(\mathfrak{g}, \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(S(\mathfrak{g}), S(\mathfrak{g})))$ che (poiché di algebre di Lie) verifica

$$\rho([xy]) = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x).$$

Per la proprietà universale dell'algebra inviluppante universale, esiste allora un unico morfismo $\overline{\rho} \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{a.u.}$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \arrow[dl, "\overline{\rho}"] \\ \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(S(\mathfrak{g}), S(\mathfrak{g})) & \end{tikzcd}$$

D'altronde, possiamo estendere $\overline{\rho}$ ad un morfismo

$$\widetilde{\rho} := \overline{\rho} \circ \pi : T(\mathfrak{g}) \to \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(S(\mathfrak{g}), S(\mathfrak{g})),$$

che è parte del seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[dr, "\rho"'] & T(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\widetilde{\rho}"] \\ & \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(S(\mathfrak{g}), S(\mathfrak{g})) \end{tikzcd}$$

e con la ovvia proprietà che $J \subseteq \mathrm{Ker}(\widetilde{\rho})$. Pertanto $t \in T(\mathfrak{g})_r \cap J$ implica che $\widetilde{\rho}(t) = 0$.

D'altronde, se scriviamo

$$t^r = \sum_{\underline{i}=(i_1,\ldots,i_r)} a_{\underline{i}} g_{\underline{i}},$$

per le proprietà (1) e (2) di ρ dimostrate nel lemma precedente.

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}(t) &= \widetilde{\rho}(t) \cdot 1 \\ &= \left(w + \sum_{\underline{i}=(i_1,\ldots,i_r)} a_{\underline{i}} \rho(g_{i_1}) \ldots \rho(g_{i_r}) \right) \cdot 1 \\ &= w' + \sum_{\underline{i}=(i_1,\ldots,i_r)} a_{\underline{i}} x_{\underline{i}}, \end{aligned}$$

dove $w, w' \in S(fg)_{r-1}$. Poiché $\widetilde{\rho}(t) = 0$, in particolare il coefficiente del termine di grado più alto si deve annullare e quindi

$$\sum_{\underline{i}=(i_1,\ldots,i_r)} a_{\underline{i}} x_{\underline{i}} = 0$$

in $S(\mathfrak{g})$, che implica $t^r \in I$. □

Teorema 3.39. *Vi è un isomorfismo di A-algebre commutative, associative, unitarie e $\mathbb{Z}$-graduate*

$$gr\, \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \simeq S(\mathfrak{g}).$$

Dimostrazione. Dobbiamo far vedere che il morfismo suriettivo μ definito dalla commutatività del diagramma (11) è anche iniettivo.

Sia dunque $t + I \in \mathrm{Ker}(\mu)$ un tensore simmetrico omogeneo di grado r, cioè $t \in T^r(\mathfrak{g})$. Abbiamo $\pi(t) = 0$ in U_r/U_{r-1}, cioè $t \in U_{r-1}$. Vogliamo far vedere che $t \in I$.

Ricordiamo che per definizione $U_{r-1} = \pi(T(\mathfrak{g})_{r-1})$ e quindi esiste un $t' \in T(\mathfrak{g})_{r-1}$ tale che $\pi(t') = \pi(t)$. Ma allora $\pi(t - t') = 0$ in $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ e cioè $t - t' \in J$. Abbiamo così trovato un elemento $t - t' \in T(\mathfrak{g})_r \cap J$ ed il lemma precedente implica che la sua componente omogenea $(t - t')^r$ di grado r è contenuta in I. Ma $(t - t')^r = t$ e pertanto otteniamo $\mu(t) \in I$, come si voleva. □

4. Teoria delle rappresentazioni

In questa sezione procederemo il più possibile considerando in parallelo *rappresentazioni* e *moduli*.

L'idea di una rappresentazione è di prendere un oggetto algebrico Y e realizzarlo come funzioni $(E \xrightarrow{f} E)$. Un modulo M è invece un oggetto algebrico dotato di una famiglia di operatori $\mathcal{F} = (M \xrightarrow{f} M)$. Vedremo precisamente come queste due nozioni sono collegate.

4.1. G-spazi.

Definizione 4.1. *Una* rappresentazione *di un gruppo G è un morfismo $\rho \in \mathbf{Gr}(G, \mathcal{S}(E, E))$, dove $E \in Ob(\mathbf{Ins})$ ed $\mathcal{S}(E)$ è il gruppo delle funzioni invertibili da E ad E.*

Osservazione 4.2. *In realtà basta chiedere che ρ sia un morfismo di monoidi da G a $\mathbf{Ins}(E, E) =: End\mathbf{Ins}_(E)$.*

Definizione 4.3. *Un G-*insieme *è un insieme $E \in Ob(\mathbf{Ins})$ dotato di un'azione di G:*

$$\sigma : G \times E \to E$$

tale che

(1) *$\sigma(g_1, \sigma(g_2, l) = \sigma(g_1 g_2, l))$ per ogni $g_1, g_2 \in G$, $l \in E$;*
(2) *$\sigma(\mathbf{1}_G, l) = l$ per ogni $l \in E$.*

Denoteremo con $g \cdot l := \sigma(g, l)$.

Osservazione 4.4. *Notiamo che vi è una corrispondenza $\rho \leftrightarrow \sigma$ data da $\rho(g)(l) = \sigma(g, l)$.*

4.2. Caso generale.

Per cominciare, sostituiamo **Ins** con una categoria **C** che sia localmente piccola. Sia ora $E \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Allora $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(E) := \mathbf{C}(E, E)$ è un monoide (con operazione composizione di funzioni).

Definizione 4.5. *Una* rappresentazione *di G su E (in **C**) è un morfismo di monoidi*

$$\rho : G \to (End_{\mathbf{C}}(E), \circ).$$

Se vogliamo seguire il punto di vista delle azioni, abbiamo bisogno di altre ipotesi.

Definizione 4.6. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria in cui esistono i biprodotti ed in cui vi è un oggetto finale* 1. *Un oggetto* $G \in Ob(\mathbf{C})$ *è detto* oggetto gruppo *se sono dati morfismi*

$$m_G \in \mathbf{C}(G \times G, G), \quad \iota_G \in \mathbf{C}(G, G), \quad u \in \mathbf{C}(\mathbf{1}_G, G)$$

che soddisfano i diagrammi opportuni (corrispondenti ad associatività, esistenza dell'inverso e dell'elemento neutro).

Definizione 4.7. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria in cui esistono i biprodotti ed in cui vi è un oggetto finale* 1. *Sia* $G \in Ob(\mathbf{C})$ *un oggetto gruppo in* $\mathbf{C}$ *e* $E \in Ob(\mathbf{C})$. *Supponiamo che esista il prodotto* $G \times E \in Ob(\mathbf{C})$, *allora diciamo che* E *è un* G*-spazio (in* $\mathbf{C}$*) se esiste un'azione, cioè un morfismo*

$$\sigma : G \times E \to E \in \mathbf{C}(G \times E, E)$$

tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} G \times G \times E \arrow[r, "\mathbf{1}_G \times \sigma"] \arrow[d, "\mathbf{1}_E"'] & G \times E \arrow[d, "\sigma"] \\ G \times E \arrow[r, "\sigma"'] & E \end{tikzcd}$$

In generale, non è detto che questi due approcci siano ora equivalenti. Questo accadrà nel caso di categorie particolarmente buone, come, ad esempio $\mathbf{A} - \mathbf{Mod}$.

Sia dunque $A \in \mathbf{CRing}$ e sia $M \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}$. In questo caso, $\mathrm{End}_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}(M) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{a.u})$ e possiamo applicare il funtore $\mathcal{L}$ per ottenere un'algebra di Lie:

$$\mathfrak{gl}(M) := \mathcal{L}(\mathrm{End}_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}(M)) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathrm{Lie}}).$$

4.3. **Rappresentazioni e moduli per monoidi.** Sia G un monoide.

Definizione 4.8. *Una* rappresentazione *(A-lineare) del monoide* G *sull'*A*-modulo* M *è un morfismo di monoidi* $\rho : G \to End_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}(M)$.

Definizione 4.9. *Un* G-modulo*è il dato di*

- *Un* A*-modulo* $M \in Ob(\mathbf{A} - \mathbf{Mod})$;
- *una* G*-azione*
$$\sigma : G \times M \to M$$
che sia A*-lineare a destra, e cioè:*
  - σ *è una* G*-azione,*
  - $\sigma(g, m_1 + m_2) = \sigma(g, m_1) + \sigma(g, m_2)$,
  - $\sigma(g, a \cdot m) = a \cdot \sigma(g, m)$.

Esercizio 4.10. *Verificare che vi è una corrispondenza* $\rho \leftrightarrow \sigma$ *tramite la formula* $\rho(g)(m) = \sigma(g, m)$.

4.4. **Rappresentazioni e moduli di algebre.**

4.4.1. *Rappresentazioni e moduli di algebre associative unitarie.* Sia $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{a.u.})$.

Definizione 4.11. *Una* rappresentazione *(A-lineare) di X sull'A-modulo M è un morfismo di A-algebre associative unitarie* $\rho : X \to End_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}(M)$.

Definizione 4.12. *Un X-*modulo *(A-lineare) è il dato di*

- *Un A-modulo* $M \in Ob(\mathbf{A} - \mathbf{Mod})$*;*
- *una X-azione*
$$\sigma : X \times M \to M$$
che sia A-bilineare, e cioè:
  - σ *è una A-azione,*
  - σ *lineare a destra e a sinistra.*

4.4.2. *Rappresentazioni e moduli di algebre di Lie.* Sia $\mathfrak{g} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathrm{Lie}})$.

Definizione 4.13. *Una* rappresentazione *(A-lineare) di* $\mathfrak{g}$ *sull'A-modulo M è un morfismo di algebre di Lie* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(M)$.

Definizione 4.14. *Un* $\mathfrak{g}$-modulo*è il dato di*

- *Un A-modulo* $M \in Ob(\mathbf{A} - \mathbf{Mod})$*;*
- *una* $\mathfrak{g}$*-azione*
$$\sigma : G \times M \to M$$
che sia A-bilineare, e cioè:
  - $\sigma(h, \sigma(k, m)) - \sigma(k, \sigma(h, m)) = \sigma([h, k], m)$
  - σ *è A-bilineare.*

Osservazione 4.15. *Notiamo che non è un caso che parliamo di* moduli*! Infatti ogni oggetto* $A \in \mathbf{CRing}$ *è anche* $A \in Ob(\mathbb{Z} - \mathbf{Alg}^{c.u.a.})$*. Pertanto, possiamo vedere la categoria* $\mathbf{A} - \mathbf{Mod}$ *come la categoria i cui oggetti sono moduli sull'anello A o come la categoria i cui oggetti sono moduli sulla* $\mathbb{Z}$*-algebra A (concetto che abbiamo definito oggi.)*

4.5. **Morfismi.** Sia $\mathbf{C} \in \{\mathbf{Mon}, \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{a.u.}, \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{\mathrm{Lie}}\}$ (dove **Mon** denota la categoria dei monoidi).

Definizione 4.16. *Sia* $Y \in Ob(\mathbf{C})$ *e siano M, N due Y-moduli su A con Y-azioni* σ_M, σ_N*, rispettivamente. Allora un morfismo di Y-moduli da M ad N è un* $f \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}(M, N)$ *che rende commutativo il seguente diagramma:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ Y \times M \arrow[u, "\sigma_M"] \arrow[r, "\mathbf{1}_Y \times f"'] & Y \times N \arrow[u, "\sigma_N"'] \end{tikzcd}$$

Denotiamo con $\mathbf{Y} - \mathbf{Mod}_{\mathbf{A}}$ la categoria i cui oggetti sono Y-moduli (A-lineari) e i cui morfismi sono i morfismi appena definiti.

Definizione 4.17. *Sia $Y \in Ob(\mathbf{C})$ e siano $M, N \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$. Siano ρ_M, ρ_N due rappresentazioni di Y su M ed N, rispettivamente. Allora un morfismo di Y-rappresentazioni da M ad N è un $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M,N)$ tale che*

$$f \circ \rho_M(y) = \rho_N(y) \circ f.$$

Denotiamo con $\mathbf{Y}-\mathbf{Rap}$ la categoria i cui oggetti sono rappresentazioni di Y e i cui morfismi sono i morfismi appena definiti.

Esempio 4.18. *Sia $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e denotiamo con $\xi_n := e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}$. Allora possiamo fornire $\mathbb{C}$ di una struttura di G-modulo ($\mathbb{C}$- o $\mathbb{R}$-lineare):*

$$G \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (r,z) \mapsto \xi_n^r \cdot z.$$

Esempio 4.19. *Sia k un campo e sia $G = GL_2(\mathbb{F}_q)$. Allora $k[x,y]$ ammette una struttura di G-modulo (k-lineare) data da*

$$G \times k[x,y] \to k[x,y], \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, p(x,y) \right) \mapsto p(ax+cy, bx+dy).$$

Se al posto di $GL_2(k)$ avessimo preso $G = SL_2(k) = \{m \in Mat_{2\times 2}(k) \mid \det(m) = 1\}$ avremmo ottenuto un modulo k-lineare per $SL_2(k)$. Questa è una procedura che si può seguire sempre: dato un modulo M per un gruppo G possiamo considerare l'azione indotta su un suo sottogruppo $H \leq G$ e dunque ottenere su M anche una struttura di H-modulo.

Esempio 4.20. *Sia $A \in Ob(\mathbf{CRing})$. Consideriamo l'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$. Allora il modulo libero A^n è dotato di struttura di $\mathfrak{g}$-modulo data dalla moltiplicazione (a sinistra) per una matrice (una volta rappresentati gli elementi di A^n come vettori colonna).*

4.6. **Rappresentazioni e moduli per algebre di Lie e per algebre associative unitarie.** Ricordiamoci che abbiamo una coppia di funtori aggiunti

$$\mathcal{L} : \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{a.u.} \to \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{\mathrm{Lie}}, \quad \mathfrak{U} : \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{\mathrm{Lie}} \to \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{a.u.}.$$

che induce una corrispondenza tra rappresentazioni di oggetti da un lato e dall'altro. Più precisamente: sia $M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$, allora abbiamo isomorfismo naturale

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{a.u.}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{End}_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}(M)) & \simeq & \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{gl}(M)) \\ || & & || \\ \{\text{rappres. di } \mathfrak{U}(\mathfrak{g})\} & & \{\text{rappres. di } \mathfrak{g}\} \end{array}$$

Tutto ciò vale anche per i morfismi e pertanto otteniamo un'equivalenza di categorie:

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) - \mathbf{Rap} \simeq \mathfrak{g} - \mathbf{Rap}.$$

Questo vuol dire che la categorie dei moduli per algebre di Lie è equivalente ad una sottocategoria della categoria dei moduli per algebre associative unitarie.

4.7. **Algebra monoide su un anello commutativo unitario.** Sia $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CRing})$ e sia $G \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Mon})$. Ricordiamo che abbiamo un funtore dimenticante
$$U : \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{a.u.} \to \mathbf{Mon}$$
che prende un'algebra X e la considera come monoide $(X, \cdot)$ (ricordandosi solo della moltiplicazione). Vogliamo ora definire un funtore che vada nella direzione opposta.

Definizione 4.21. *Siano $A \in Ob(\mathbf{CRing})$ e $G \in Ob(\mathbf{Mon})$. L'*algebra monoide *di G* su *A è il dato di:*

- *$A[G] := \bigoplus_{g \in G} Ag \in \mathbf{A} - \mathbf{Mod}$ (cioè l'A-modulo libero di base G)*
- *con legge di composizione data da*
$$\left(\sum_{h \in G} a_h h\right) \cdot \left(\sum_{k \in G} b_k k\right) := \sum_{g \in G} \left(\sum_{hk = g} a_h b_k\right) g.$$

Esercizio 4.22. *Verificare che effettivamente $A[G]$ è un'A-algebra associativa unitaria.*

Osservazione 4.23. *Vi è un morfismo $i_G \in \mathbf{Mon}(G, A[G])$, dato da $g \mapsto g = \mathbf{1}_A g$.*

Proposizione 4.24. *L'A-algebra $A[G]$ gode della seguente proprietà universale: per ogni $X \in Ob(\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{a.u.})$ e per ogni $\varphi \in \mathbf{Mon}(G, U(X))$, esiste un unico morfismo $\overline{\varphi} \in \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{a.u.}(A[G], X)$ che rende commutativo il seguente diagramma:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i_G"] \arrow[d, "\varphi"'] & A[G] \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\ U(X) & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Omessa (anche a lezione). □

La proposizione precedente ci dice dunque che abbiamo un funtore
$$A[\cdot] : \mathbf{Mon} \to \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{a.u.}.$$

Corollario 4.25. *Il funtore $A[\cdot]$ è aggiunto sinistro del funtore dimenticante U.*

Dimostrazione. **Esercizio!** □

Tale aggiunzione implica che per ogni $M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} - \mathbf{Mod})$ abbiamo un isomorfismo naturale
$$\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{a.u.}(A[G], \mathrm{End}_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}(M)) \simeq \mathbf{Mon}(G, U(\mathrm{End}_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}(M))),$$
e dunque una biezione
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{rappresentazioni} \\ \text{di } A[G] \text{ su } M \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{rappresentazioni} \\ \text{di } G \text{ su } M \end{array} \right\}$$

cioè

$$\left\{\begin{array}{c}\text{strutture di}\\ A[G]\text{-modulo su } M\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{strutture di}\\ G-\text{modulo su } M\end{array}\right\}$$

Più esplicitamente, se $\sigma : G \times M \to M$ è una G-azione (A-lineare) su M, allora la $A[G]$-azione corrispondente $\sigma_A : A[G] \times M \to M$ è data da:

$$\sigma_A(\sum_{g\in G}, m) = \sum_{g\in G} a_g \sigma(g, m).$$

Notiamo che quanto detto si estende anche ai morfismi di moduli: per ogni $M, M' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$ e per ogni $f \in \mathbf{A}-\mathbf{Mod}(M, M')$, $f \in \mathbf{A}[\mathbf{G}]-\mathbf{Mod}_{\mathbf{A}}(M, M')$ se e solo se $f \in \mathbf{G}-\mathbf{Mod}_{\mathbf{A}}$.

Ne deduciamo che esiste un'equivalenza di categorie

$$\mathbf{G}-\mathbf{Mod}_{\mathbf{A}} \overset{\simeq}{\rightrightarrows} \mathbf{A}[\mathbf{G}]-\mathbf{Mod}_{\mathbf{A}}.$$

Questo vuol dire la categorie dei moduli per monoidi, come nel caso delle algebre di Lie, è equivalente ad una sottocategoria della categoria dei moduli per algebre associative unitarie.

4.8. **Costruzioni.** Sia $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ con $\mathbf{C} \in \{\mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{\mathrm{a.u.}}, \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{\mathrm{Lie}}\}$ e sia $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CRing})$.

4.8.1. *Sottomoduli.*

Definizione 4.26. *Sia $M \in \mathbf{Y}-\mathbf{Mod}_{\mathbf{A}}$. Allora un Y-sottomodulo di M è un $M' \in Ob(Amod)$ tale che*

- *M' è un A-sottomodulo di M,*
- *M' è Y-stabile, cioè $y \cdot m' \in M'$ per ogni $(y, m') \in Y \times M'$.*

Pertanto se M' è un Y-sottomodulo di M, esso ha una struttura di Y-modulo per l'azione

$$\sigma_{M'} := \sigma_{M|_{Y\times M'}} : Y \times M' \to M'.$$

Inoltre, esiste una rappresentazione di Y su M' data da

$$\rho_{M'} : Y \to \mathrm{End}_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}(M'), \quad y \mapsto \rho_{M'}(y) := \rho_M(y)_{|_{M'}}.$$

Esempio 4.27. *Per ogni $f \in \mathbf{Y}-\mathbf{Mod}_{\mathbf{A}}(M, M')$ si ha che $Kerf$ e Imf sono Y-sottomoduli di M ed M', rispettivamente.*

4.8.2. *Quozienti.*

Definizione 4.28. *Sia M un Y-modulo ed M' un suo Y-sottomodulo. Allora l'Y-modulo quoziente è il dato di*

- *$M/M' \in Ob(\mathbf{A}-\mathbf{Mod})$,*
- *con Y-azione data da*

$$\sigma_{M/M'} : Y \times M/M' \to M/M', \quad (y, m + M') \mapsto \sigma_M(y, m) + M'$$

e corrispondente alla rappresentazione

$$\rho_{M/M'} : Y \to End_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}(M/M'), \quad y \mapsto \rho_{M/M'}(y) := \overline{\rho_M(y)},$$

dove $\overline{\rho_M}$ è l'unico morfismo che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho_M(y)} & M \\ {\scriptstyle \pi'_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_M} \\ M/M' & \xrightarrow{\overline{\rho_M(y)}} & M/M' \end{array}$$

Esercizio 4.29. *Si dimostri che $\sigma_{M/M'}$ e $\rho_{M/M'}$ sono correttamente definiti e che "tutto funziona".*

Esercizio 4.30. *Sia $A = k$ un campo e si fissi una base di M che sia estensione di una base di M'. Trovare la forma delle matrici $\rho_{M'}(y)$ e $\rho_{M/M'}(y)$ in funzione della matrice $\rho_M(y)$ per ogni $y \in Y$ e per ogni Y-sottomodulo M'.*

4.8.3. *0-oggetto.* Vi è uno 0-oggetto (cioè, un oggetto al contempo finale ed iniziale) in $\mathbf{Y-Mod}$ ed è l'Y-modulo banale, ovvero (0) con azione

$$\sigma_Y \times (0) \to (0), \quad (y, 0) \mapsto 0,$$

e rappresentazione banale

$$\rho : Y \to \mathrm{End}_{\mathbf{A-Mod}}((0)), \quad y \mapsto \mathrm{Id}_{(0)}.$$

4.8.4. *Prodotti e coprodotti.* In $\mathbf{Y-Mod}$ esistono prodotti e coprodotti arbitrari. Infatti, data famiglia $(M_i)_{i\in I}$ di Y-moduli:

- l'A-modulo $\prod_{i\in I} M_i$ è anche un Y-modulo per l'azione
$$\sigma \times \prod_{i\in I} M_i \to \prod_{i\in I} M_i, \quad (y, (m_i)_{i\in I}) \mapsto (\sigma_i(y, m_i)),$$
cioè, $y \cdot (m_i)_{i\in I} = (y \cdots m_i)_{i\in I}$.
  Tale Y-modulo è un prodotto in $\mathbf{Y-Mod}$ della famiglia $(M_i)_{i\in I}$ con le proiezioni
$$\pi_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$$
che sono chiaramente morfismi in $\mathbf{Y-Mod}$.
- l'A-modulo $\bigoplus_{i\in I} M_i$ è anche un Y-modulo per l'azione σ indotta dall'azione di Y su $\prod_{i\in I} M_i$; in altre parole, $\bigoplus_{i\in I} M_i$ è un Y-sottomodulo di $\prod_{i\in I} M_i$. Inoltre, le immersioni
$$\eta_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i$$
sono morfismi di Y-moduli e pertanto $(\bigoplus_{i\in I} M_i, (\eta_i)_{i\in I})$ è un coprodotto in $\mathbf{Y-Mod}$.

Osservazione 4.31. *Come in $\mathbf{A-Mod}$, anche in $\mathbf{Y-Mod}$ si ha che $\#I < \infty$ se e solo se $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$.*

Osservazione 4.32. *Dato l'Y-modulo $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$, la rappresentazione corrispondente*

$$\rho : Y \to End_{\mathbf{A-Mod}}(M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n)$$

ha la proprietà che ogni $\rho(y)$ ha la forma di matrice a blocchi.

4.9. **Decomposizione e riduzione.** Sia $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ con $\mathbf{C}$ una delle seguenti categorie: $\mathbf{Mon}, \mathbf{A-Alg}^{\mathrm{a.u.}}, \mathbf{A-Alg}^{\mathrm{Lie}}$.

Definizione 4.33. *Un oggetto $M \in Ob(\mathbf{Y-Mod})$ si dice:*

- decomponibile *se esistono Y-sottomoduli M_1, M_2 tali che $M_i \neq (0), M$ per $i = 1, 2$, ed $M = M_1 \oplus M_2$,*
- indecomponibile *se non è decomponibile,*
- riducibile *se esiste un Y-sottomodulo $M' \subset M$ tale che $M' \neq (0), M$,*
- irriducibile *o* semplice *se non è riducibile.*

Esercizio 4.34. *Si dimostri che se M è irriducible, allora è anche indecomponibile. Si faccia vedere che esistono moduli indecomponibili che sono riducibili.*

4.10. **Completa riducibilità per gruppi finiti.** Sia G un gruppo finito e sia $A = k$ un campo la cui caratteristica non divide la cardinalità di G. Faremo vedere che sotto queste ipotesi ogni G-modulo finito dimensionale $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{G-Mod_k}^{f.d.})$ è somma diretta di G-moduli irriducibili.

Lemma 4.35. *Sia k un campo tale che $char(k) \mid |G|$ Sia $V \in Ob(\mathbf{G-Mod_k}^{f.d.})$ con $dim_k(V) > 1$ e sia $W \subset V$ un G-sottomodulo proprio. Allora esiste un G-sottomodulo (proprio) $U \subset V$ complementare di W in V e cioè tale che $V = W \oplus U$.*

Dimostrazione. Sappiamo che W ammette un complementare U_0 in V come k-sottomodulo (che sarebbe a dire, come spazio vettoriale). Pertanto in $\mathbf{k-Mod}$ si ha $V = U_0 \oplus W = W \oplus U_0$.

Sia $\pi_0 : V \to W$ la proiezione associata alla decomposizione $V = W \oplus U_0$ e definiamo

$$\pi : V \to W, \quad v \mapsto |G|^{-1} \sum_{g \in G} g\pi_0(g^{-1}v).$$

Allora $\pi(w) = w$ per ogni $w \in W$ e pertanto abbiamo una scomposizione in sottospazi vettoriali $V = \mathrm{Im}\,(\pi) \oplus \mathrm{Ker}(\pi) = W \oplus U$, dove $U = \mathrm{Ker}(\pi)$. Per concludere dobbiamo mostrare che U è G-stabile, ma questo segue dal fatto che $\pi \in \mathbf{G}-\mathbf{Mod_k}^{f.d.}$: per ogni $g \in G$ e $v \in V$, allora

$$\begin{aligned}\pi(hv) &= |G|^{-1}\sum_{g\in G} g\pi_0(g^{-1}(hv)) \\ &= |G|^{-1}h\left(\sum_{g\in G} h^{-1}g\pi_0(g^{-1}(hv))\right) \\ &= h\left(|G|^{-1}\sum_{x\in G} x\pi_0(x^{-1}v)\right) \\ &= h\pi(v).\end{aligned}$$

□

Teorema 4.36. *Sia $V \in Ob(\mathbf{G}-\mathbf{Mod_k}^{f.d.})$. Allora $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$, con $W_i \in Ob(\mathbf{G}-\mathbf{Mod_k}^{f.d.})$ irriducibile per ogni i.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $\dim_k(V)$.

Chiaramente, se $\dim_k(V) = 1$, allora V è irriducibile.

Per il principio del minimo (in $\mathbb{Z}_{>0}$), esiste un G-sottomodulo $W_1 \subseteq V$ irriducibile (come G-modulo) e tale che $\dim_k(W_1) > 0$ è minima.

Lemma 4.35 ci dice che esiste un sottomodulo U_1 complementare di W_1 in V e abbiamo $V = W_1 \oplus U_1$ con $\dim_k(U_1) < \dim_k(V)$. Per ipotesi induttiva, esistono G-sottomoduli irriducibili $(U'_j)_{j\in J}$ di U_1 tali che $U_1 = \bigoplus_{j\in J} U'_j$.

Concludiamo che $V = W_1 \oplus \bigoplus_{j\in J} U'_j$. □

4.11. **Esempi.**

4.11.1. *Linearizzazione delle G-azioni.* . Vedremo come a partire dall'azione di un monoide su un insieme possiamo costruire una rappresentazione.

Sia dunque G un monoide e sia E un G-spazio (abbiamo cioè un'azione $\sigma : G \times E \to E$). Ciò che vogliamo fare è *linearizzare* E per farne un G-modulo.

Sia dunque $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CRing})$ e denotiamo $A^{(E)}$ l'A-modulo libero su E, cioè l'A-modulo libero con base E. Più esplicitamente,

$$A^{(E)} = \left\{\sum_{e\in E} a_e e \mid \#\{a_e \neq 0\} < \infty\right\}.$$

Per la proprietà universale dei moduli liberi, esiste un'unica G-azione A-lineare su $A^{(E)}$ che

$$g \cdot (\sum_{e\in E} a_e e) := \sum_{e\in E} a_e(g\cdot e).$$

che estende la G-azione $\sigma : G \times E \to E$. Abbiamo dunque che $A^{(E)} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{G}-\mathbf{Mod_A})$.rende $A^{(E)}$ un G-modulo:

4.12. **Confronto struttura modulo per gruppo VS modulo per anello.** Consideriamo $\mathbb{C} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{R} - \mathbf{Mod})$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ denotiamo $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/\equiv_n$. Denotiamo $\zeta_n := e^{i\frac{2\pi}{n}} (\in \mathbb{C})$. Allora esiste un unico morfismo di gruppi

$$\varphi : (\mathbb{Z}_n, +) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}-\mathbf{Mod}}(\mathbb{C}), \quad \overline{k} \mapsto \varphi(\overline{k}) := (z \mapsto \zeta_n^k z).$$

Attenzione: questa è una rappresentazione del gruppo $(\mathbb{Z}_n, +)$ e non dell'anello $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, dato che il morfismo φ non può essere esteso ad un morfismo di anelli.

4.12.1. *Restrizione.* Siano dati due oggetti $Y, Y' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ (dove $\mathbf{C} \in \{\mathbf{Mon}, \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{a.u.}, \mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{Lie}\}$) ed un morfismo $\varphi \in \mathbf{C}(Y, Y')$. Per ogni rappresentazione di Y su M

$$\rho : Y \to \mathrm{End}_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}(M)$$

otteniamo una rappresentazione di Y' su M data da

$$\rho \circ \varphi : Y' \to \mathrm{End}_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}(M).$$

4.12.2. *L'algebra di Lie speciale lineare* $\mathfrak{sl}_{n,A}$. Sia, come al solito, $A \in \mathbf{CRing}$. Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ possiamo considerare l'A-algebra di Lie

$$\mathfrak{gl}_{n,A} := \mathfrak{gl}(A^n) = \mathfrak{L}(\mathrm{End}_{\mathbf{A}-\mathbf{Mod}}(A^n)).$$

Abbiamo una A-sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{n,A}$, detta *speciale lineare*:

$$\mathfrak{sl}_{n,A} := \{\varphi \in \mathfrak{gl}_{n,A} \mid \mathrm{Tr}(\varphi) = 0\}.$$

Per quanto detto in §4.12.1, tutte le rappresentazioni di $\mathfrak{gl}_{n,A}$ ammettono una struttura di rappresentazioni di $\mathfrak{sl}_{n,A}$.

4.12.3. *Realizzazione esplicita di alcune rappresentazioni di* $GL_{2,k}$ *ed* $SL_{2,k}$. Sia k un campo e sia $M := A[x, y] (\in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} - \mathbf{Mod}))$. Abbiamo i seguenti gruppi:

$$GL_{2,k} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in k, \text{ tali che } ad - bc \neq 0 \right\},$$

$$SL_{2,k} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in k, \text{ tali che } \ ad - bc = 1 \right\}.$$

Fatto 1: M è un modulo su $GL_{2,k}$ (pertanto, anche un modulo per $SL_{2,k}$) per l'azione data da

$$GL_{2,k} \times A[x, y] \to A[x, y], \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot p(x, y) := p(ax + by, cx + dy).$$

Fatto 2: Per ogni $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, consideriamo

$$A[x, y]^n := \{p(x, y) \in A[x, y] \mid p(x, y) \text{ è omogeneo di grado } n\}.\}$$

Allora esso è un sottomodulo per $GL_{2,k}$ (e anche $SL_{2,k}$). Otteniamo allora una graduazione sull'anello

$$A[x,y] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A[x,y]^n.$$

4.12.4. *Algebra dei polinomi non commutativi e algebra di Weyl.* Sia k un campo. Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ possiamo considerare la k-algebra dei polinomi non commutativi:

$$k\langle \chi_1, \dots, \chi_n, \partial_1, \dots, \partial_n\rangle.$$

Ne vogliamo considerare il suo quoziente per l'ideale I, dove:

$$I := \langle \chi_i\chi_j - \chi_j\chi_i; \partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i; \chi_i\partial_j - \partial_j\chi_i + \delta_{i,j}\rangle_{1\le i,j\le n}$$

dove $\delta_{i,j}$ denota il delta di Kronecker. Denotiamo con $W_{n,k}$ questo quoziente (W da *algebra di Weyl*).

Esiste un unico morfismo $\rho \in \mathbf{k}-\mathbf{Alg}^{a.u.}(W_{n,k}, \mathrm{End}_{\mathbf{k}-\mathbf{Mod}}(k[x_1,\dots,x_n]))$ dato da

$$\begin{array}{rcl} \rho : W_{n,k} & \to & \mathrm{End}_{\mathbf{k}-\mathbf{Mod}}(k[x_1,\dots,x_n]), \\ \chi_i & \mapsto & m_{x_i} := (p(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_i p(x_1,\dots x_n)), \\ \partial_j & \mapsto & \partial/\partial x_j. \end{array}$$

Questo è un morfismo di algebre ed è una rappresentazione dell'algebra di Weyl. Abbiamo cioè dimostrato che l'anello dei polinomi in n-variabili è una rappresentazione dell'algebra di Weyl.

Una possibile variante consiste nel prendere $k[[x_1,\dots,x_n]]$ invece di $k[x_1,\dots,x_n]$. Una seconda possibile variante, nel caso di $k=\mathbb{R}$, consiste nel considerare $\mathcal{C}^\infty$ anziché $k[x_1,\dots,x_n]$.

4.13. **Approfondimento sui moduli irriducibili.** Sia $M \in \mathbf{Y}-\mathbf{Mod}$.

Lemma 4.37 (Lemma di Schur)**.** *Sia $Y \in Ob(\mathbf{C})$ (dove $\mathbf{C} \in \{\mathbf{Mon}, \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{a.u.}, \mathbf{A}-\mathbf{Alg}^{Lie}\}$). Allora:*

(1) *per ogni coppia di moduli irriducibili $M, N \in Ob(\mathbf{Y}-\mathbf{Mod})$ si ha*

$$\mathbf{Y}-\mathbf{Mod}(M,N) = \{\mathbf{0}_{M\to N}\} \cup \{\mathbf{Iso}_{\mathbf{Y}-\mathbf{Mod}}(M,N)\},$$

dove $\mathbf{0}_{M\to N}$ è il morfismo che manda ogni elemento di M in 0_N ed $\mathbf{Iso}_{\mathbf{Y}-\mathbf{Mod}}(M,N)$ denota l'insieme di morfismi in $\mathbf{Y}-\mathbf{Mod}(M,N)$ che sono invertibili;

(2) *per ogni $M \in Ob(\mathbf{Y}-\mathbf{Mod})$ irriducibile la A-algebra $End_{\mathbf{Y}-\mathbf{Mod}}(M)$ è un corpo (o "anello di divisione");*

(3) *se $A=k$ è un campo algebricamente chiuso, allora per ogni $M \in Ob(\mathbf{Y}-\mathbf{Mod}^{f.d.})$ irriducibile si ha che $End_{\mathbf{Y}-\mathbf{Mod}}(M) \simeq k$.*

Dimostrazione. (1) Sia $\varphi \in \mathbf{Y}-\mathbf{Mod}(M,N)$. Abbiamo che $\mathrm{Ker}\varphi$ è un Y-sottomodulo di M e che $\mathrm{Im}\varphi$ è un Y-sottomodulo di N. Poiché M ed N sono irriducibili, non hanno sottomoduli propri non banali, pertanto abbiamo solo due possibilità: $\mathrm{Im}(\varphi)=\{0\}$ (cioè, $\varphi=0$) o $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$ (cioè, φ è iniettivo). Nel secondo caso, $\mathrm{Im}(\varphi) \simeq M \neq$

$\{0\}$ è un sottomodulo non banale di N, ma essendo N irriducibile deve essere $\mathrm{Im}(\varphi) = N$. Pertanto abbiamo un morfismo di Y-moduli iniettivo e suriettivo. Nella categoria $\mathbf{Y} - \mathbf{Mod}$ gli isomorfismi sono proprio morfismi di Y-moduli che al tempo stesso siano iniettivi e suriettivi e pertanto φ è un isomorfismo.

(2) Segue immediatamente dal punto precedente, applicato al caso $N = M$.

(3) Prima di tutto notiamo che abbiamo un morfismo iniettivo

$$k \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbf{Y}-\mathbf{Mod}}(M), \quad c \mapsto c \cdot \mathbf{1}_M.$$

Facciamo ora vedere che tutti i morfismi sono multipli scalari dell'identità. Sia dunque $\varphi \in \mathbf{Y} - \mathbf{Mod}_{\mathbf{A}}(M, M) \setminus \{0\}$. Poiché M è uno spazio vettoriale su un campo algebricamente chiuso, esiste un autovalore non nullo $\lambda \in A$ di φ. Possiamo allora considerare il morfismo

$$\varphi - \lambda \mathrm{Id} \in End_{A-Mod}(M)$$

e l'A-modulo $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id})$. È immediato verificare che $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id})$ è un Y-sottomodulo. Inoltre, poiché λ è un autovalore, $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id}) \neq (0)$ e dunque è un Y-sottomodulo non banale di M. D'altronde, M è irriducibile e dunque $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id}) = M$, ovvero $\varphi = \lambda \mathrm{Id}$.

□

4.14. **Caso commutativo.** In questa breve sezione partiremo con un'ipotesi e poi faremo ulteriori restrizioni.

Ipotesi 1: Sia $A \in \mathbf{CRing}$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A} - \mathbf{Alg}^{c.a.u.})$ e $M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{X} - \mathbf{Mod})$.

Fatto 1: Per ogni $a, \alpha \in Y$ e per ogni $m \in M$, si ha

$$a \cdot (\alpha \cdot m) = (a\alpha) \cdot m = (\alpha a) \cdot m = \alpha \cdot (a \cdot m)$$

cioè $\rho(a)(\alpha \cdot m) = \alpha(\rho(a)(m))$, quindi $\rho(a) \in \mathrm{End}_{\mathbf{Y}-\mathbf{Mod}}(M)$.

Adesso aggiungiamo un'ipotesi:

Ipotesi 2: M irriducibile, $A = k$ campo algebricamente chiuso e $\dim_k(M) < \infty$.

Siamo nelle ipotesi del Lemma di Schur, dal quale segue che $\mathrm{End}_{\mathbf{Y}-\mathbf{Mod}}(M) = k$. Quindi **Fatto 1** assieme a quanto appena notato ci dice che ρ assume valori in k, e cioè che $\rho_M \in \mathbf{k} - \mathbf{Alg}^{a.u.}(Y, k)$ (detto in altre parole, ρ_M *è un carattere di* Y).

Osserviamo che da questa discussione segue che $\dim_k(M) = 1$. Infatti, per ogni $m \in M \setminus \{0\}$, possiamo considerare $M' := k \cdot m$. Ma questo è un sottomodulo e poiché M è irriducibile, deve coincidere con esso.

Quindi se

$$\widehat{X} := \{\text{rappresentazioni irriducibili di } X\} / \simeq,$$

esiste una biezione

$$\mathbf{k} - \mathbf{Alg}^{a.u.}(X, k) \overset{\simeq}{\longleftrightarrow} \widehat{X}, \quad \rho \mapsto (\text{azione } X \times k \to k,\ x \cdot h := \rho(x)h).$$

Ipotesi 3: Sia $X := k[x_1, \ldots, x_n]$.

Prima di tutto osserviamo che per ogni $\rho \in \mathbf{k}-\mathbf{Alg}^{a.u.}(X,k)$ esiste un unico morfismo $\rho(\underline{x}) := (\rho(x_1),\dots,\rho(x_n)) \in k^n$ che induce un morfismo

$$k[x_1,\dots,x_n] \to k.$$

Inoltre, per ogni $\underline{a} = (a_1,\dots,a_n) \in k^n$, esiste un unico morfismo $\rho_{\underline{a}} \in \mathbf{k}-\mathbf{Alg}^{a.u.}(X,k)$ tale che $\rho_{\underline{a}}(x_i) = a_i$ per ogni $i = 1,\dots,n$. Quindi esiste una biiezione

$$k^n \longleftrightarrow \mathbf{k}-\mathbf{Alg}^{a.u.}(X,k), \quad \underline{a} \mapsto \rho_{\underline{a}}.$$

4.15. **Classificazione delle rappresentazioni irriducibili di dimensione finita di $\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{C}}$.** Concludiamo il corso con la classificazione delle rappresentazioni irriducibili di dimensione finita della $\mathbb{C}$-algebra di Lie $\mathfrak{sl}_{2,\mathbb{C}}$.

In questa sezione ometteremo il $\mathbb{C}$ dalla notazione e scriveremo semplicemente $\mathfrak{sl}_2$.

Prima di tutto, osserviamo che $\mathfrak{sl}_2$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione 3 ed una base è data da:

$$e := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che la struttura di algebra di Lie, indotta dalla struttura di algebra di Lie su $\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}} = \mathfrak{L}(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2))$, è data da

$$[a,b] = ab - ba \qquad a,b \in \mathfrak{sl}_2.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned}
[h,e] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2e, \\
[h,f] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -2f, \\
[e,f] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = h.
\end{aligned}$$

Definizione 4.38. *Un'algebra di Lie si dice semplice se non è abeliana e se non possiede ideali propri non banali.*

Dalle regole di moltiplicazione vediamo allora che $\mathfrak{sl}_2$ è un'algebra di Lie semplice. Osserviamo che questo sarebbe stato vero anche se avessimo considerato $\mathfrak{sl}_{2,A}$ per A un qualunque anello in cui $2 \neq 0$.

Si può dimostrare (si veda, ad esempio, [2, §10]) che $\mathfrak{sl}_2$ è la più "piccola" algebra di Lie semplice complessa (a meno di isomorfismo), cioè non vi sono algebre di Lie semplici complesse di dimensione 1 o 2, e tutte quelle di dimensione 3 sono isomorfe ad $\mathfrak{sl}_2$. Abbiamo pertanto a che fare con l'esempio più elementare di algebra di Lie complessa semplice.

4.15.1. *Spazi peso.* Sia (V, ρ_V) una rappresentazione di $\mathfrak{sl}_2$. Per un elemento $a \in \mathfrak{sl}_2$ ed un $v \in V$, useremo la notazione $a \cdot v$ per indicare $\rho_V(a)(v)$ (cioè consideriamo la struttura di $\mathfrak{sl}_2$-modulo indotta da ρ_V su V).

Definizione 4.39. *Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e V una rappresentazione di $\mathfrak{sl}_2$.*

- *Il sottospazio vettoriale*
$$V_\lambda := \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda v\}$$
si dice spazio peso di V *(rispetto all'azione di h).*
- *Un numero complesso λ è detto* peso di V *(rispetto all'azione di h) se $V_\lambda \neq \{0\}$.*

Notiamo che h (tramite ρ_V) è un operatore lineare su V e pertanto stiamo solo dando un nuovo nome ad autospazi e autovalori.

Il prossimo risultato descrive l'effetto dell'azione di e ed f su un elemento $v \in V_\lambda$ (v non è altro che un autovettore di h di autovalore λ).

Lemma 4.40. *Sia $v \in V_\lambda$. Allora:*

(1) $e \cdot v \in V_{\lambda+2}$,
(2) $f \cdot v \in V_{\lambda-2}$.

Dimostrazione. (1) Poiché $[h, e] = 2e$, per ogni $v \in V_\lambda$ abbiamo che

$$\begin{aligned} h \cdot (e \cdot v) &= (he) \cdot v = ([h, e] + eh) \cdot v = [h, e] \cdot v + (eh) \cdot v \\ &= 2e \cdot v + e \cdot (h \cdot v) = 2e \cdot v + e \cdot (\lambda v) = (2 + \lambda) \cdot (e \cdot v). \end{aligned}$$

(2) Poiché $[h, f] = -2f$, per ogni $v \in V_\lambda$ abbiamo che

$$\begin{aligned} h \cdot (f \cdot v) &= (hf) \cdot v = ([h, f] + fh) \cdot v = [h, f] \cdot v + (fh) \cdot v \\ &= -2f \cdot v + f \cdot (h \cdot v) = -2f \cdot v + f \cdot (\lambda v) = (-2 + \lambda) \cdot (f \cdot v). \end{aligned}$$

□

4.15.2. *Vettori di peso più alto.* Fino ad ora non abbiamo assunto che V fosse di dimensione finita né che fosse irriducibile. In questa sezione useremo l'ipotesi di finitudine.

Lemma 4.41. *Se $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, allora esiste un $w \in V$ tale che $e \cdot w = 0$.*

Dimostrazione. Ricordiamoci che stiamo lavorando su $\mathbb{C}$ e quindi h (o, per essere più precisi, $\rho_V(h)$) ha almeno un autovalore λ e quindi almeno un autovettore $v \in V_\lambda$.

Consideriamo ora il seguente sottospazio di V:

$$\text{span}_{\mathbb{C}} = \{v, e \cdot v, e^2 \cdot v, \ldots, e^i \cdot v, \ldots\}.$$

Per il precedente risultato sappiamo che $e^i \cdot v$ ed $e^j \cdot v$ appartengono a due spazi peso diversi. Pertanto (**dimostrare la seguente affermazione!**) sono linearmente indipendenti. Questo implica che vi sia un k tale che

$e^k \cdot v = 0$ (altrimenti, essendo tutti linearmente indipendenti genererebbero un sottospazio di V di dimensione infinita). $\square$

Definizione 4.42. *Un vettore $w \in V \setminus \{0\}$ di dice* vettore di peso più alto *se esiste un $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tale che $e^k \cdot w = 0$. In tal caso, il $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $e^{k-1} w \in V_\lambda$ si dice* pero più alto di V.

4.15.3. *Base di una rappresentazione irriducibile e finito dimensionale.*

Lemma 4.43. *Sia V una rappresentazione di $\mathfrak{sl}_2$ irriducibilie e finito dimensionale. Sia $w \in V_\lambda$ un vettore di peso più alto e sia $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tale che*

$$f^l \cdot w \neq 0, \quad f^{l+1} \cdot w = 0.$$

Allora il seguente insieme forma una base per V:

$$\{w,\ f \cdot w,\ f^2 \cdot w, \dots,\ f^{l-1} \cdot w,\ f^l \cdot w, \}.$$

Dimostrazione. Poiché V è irriducibile, la tesi segue una volta che fatto vedere che i vettori dell'insieme dato sono linearmente indipendenti e che il sottospazio vettoriale da loro generato è una rappresentazione di $\mathfrak{sl}_2$.

Per quanto riguarda l'indipendenza lineare, essa segue dal Lemma 4.40: ci serviamo del fatto che vettori appartenenti ad autospazi di autovalori differenti sono linearmente indipendenti (abbiamo già utilizzato questo argomento in precedenza) .

Consideriamo dunque

$$U := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{w,\ f \cdot w,\ f^2 \cdot w, \dots,\ f^{l-1} \cdot w,\ f^l \cdot w, \}.$$

Per dimostrare che U una sottorappresentazione di V dobbiamo far vedere che per ogni $a \in \mathfrak{sl}_2$ e per ogni $v \in U$ vale $a \cdot v \in U$, o, equivalentemente, $a \cdot (f^i w) \in U$ per ogni $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Poiché e, h, f è una base di $\mathfrak{sl}_2$ come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, sarà sufficiente far vedere che per ogni $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ abbiamo

$$e \cdot (f^i w) \in U, \quad h \cdot (f^i w) \in U, f \cdot (f^i w) \in U. \tag{12}$$

Chiaramente, $f(f^i \cdot w) = f^{i+1} \cdot w \in U$ (dato che $f^j \cdot w = 0$ per ogni $j > l$). Inoltre, applicando i volte nel Lemma 4.40(2) otteniamo che $h \cdot (f^i w) \in V_{\lambda - 2i}$ e pertanto $h \cdot U \subseteq U$.

Ci rimane da verificare che U è stabile per l'azione di e. Faremo vedere per induzione su $i \geq 0$ che vale la seguente formula:

$$e \cdot (f^i \cdot w) = i(\lambda - i + 1) \cdot (f^{i-1} \cdot w).$$

Il caso $i = 0$ segue immediatemente dall'ipotesi w vettore di peso più alto. Supponiamo ora il risultato vero per ogni $j < i$ e diamostriamo che questo implica che sia valido anche per i. Useremo che $[e, f] = h$.

$$\begin{aligned} e \cdot (f^i \cdot w) &= (ef) \cdot (f^{i-1} \cdot w) = ([ef] + fe) \cdot (f^{i-1} \cdot w) = \\ &= (h + fe) \cdot (f^{i-1} \cdot w) = h \cdot (f^{i-1} \cdot w) + f \cdot (e \cdot (f^{i-1} \cdot w)) \\ &= (\lambda - 2i + 2)(f^{i-1} \circ w) + f \cdot ((i-1)(\lambda - i + 2) \cdot (f^{i-2} \cdot w)) \end{aligned}$$

$\square$

Se V possiede un vettore come il w nelle ipotesi del Lemma precedente, allora lo denotiamo $V^{(\lambda)}$.

Corollario 4.44. *Sia V una rappresentazione irriducibile finito dimensionale e siano come prima $w \in V_\lambda$ ed $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tale che $f^l \cdot w \neq 0$ e $f^{l+1} \cdot w = 0$. Affinché w sia di peso più alto dobbiamo avere $l = \lambda$.*

Dimostrazione. Questo segue subito dalla formula (12)

$$0 = e \cdot 0 = e \cdot (f^{l+1} \cdot w) = (l+1)(\lambda - l) f^l \cdot w.$$

Poiché abbiamo assunto $l + 1 \neq 0$ e $f^l \cdot w \neq 0$, deve valere $\lambda - l = 0$. $\square$

Come immediato corollario del risultato appena dimostrato abbiamo:

Corollario 4.45.
(1) *La rappresentazione $V^{(\lambda)}$ ha dimensione $\lambda + 1$;*
(2) *L'insieme dei pesi di $V^{(\lambda)}$ è*

$$\{\lambda - i \mid i \in 2\mathbb{Z}, i \leq \lambda\} = \{-\lambda, \lambda + 2, \dots, \lambda - 2, \lambda\}.$$

Corollario 4.46. *Sia V una rappresentazione irriducibile finito dimensionale di $\mathfrak{sl}_2$ e sia μ un peso di V. Allora $dim_{\mathbb{C}}(V_\mu) = 1$.*

Dimostrazione. Abbiamo dato una base esplicita per V, che consiste di elementi della forma $f^i \cdot w$ per w un h-autovettore. Ma sappiamo che se $i \neq j$, allora $f^i \cdot w$ ed $f^j \cdot w$ appartengo a due spazi peso differenti. Quindi $\dim_{\mathbb{C}}(V_\chi) \leq 1$ per ogni $\chi \in \mathbb{C}$ e la tesi segue dalla definizione di peso (ricordiamo che μ è un peso se e solo se $V_\mu \neq 0$). $\square$

Riassumendo, abbiamo dimostrato:

Teorema 4.47. *Sia V una rappresentazione irriducibile finito dimensionale di $\mathfrak{sl}_2$. Allora*

(1) *$V = \bigoplus_{\mu \in \{-\lambda, -\lambda+2, \dots, \lambda-2, \lambda\}} V_\mu$, dove $\lambda = dim_{\mathbb{C}}(V) - 1$ e $dim_{\mathbb{C}}(V_\mu) = 1$ per ogni μ che appare come indice della somma diretta.*
(2) *V ha (a meno di multipli scalari non nulli) un unico vettore di peso più alto w, il cui peso è λ.*
(3) *Consideriamo la base di V data da $\{w, f \cdot w, \dots, f^{\lambda-1} \cdot w, f^\lambda \cdot w\}$. Allora l'azione di $\mathfrak{sl}_2$ è obbligata e data da:*

$$h \cdot (f^i \cdot w) = (\lambda - 2i) f^i \cdot w,$$

$$f \cdot (f^i \cdot w) = \begin{cases} f^{i+1} \cdot w & se\ i \in \{0, \dots \lambda - 1\}, \\ 0 & se\ i = \lambda, \end{cases}$$

$$e \cdot (f^i \cdot w) = i(\lambda - i + 1) f^{i-1} \cdot w.$$

Dal punto (3) del teorema precedente vediamo che fissato un $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vi è al più una (a meno di isomorfismo) rappresentazione irriducibile di $\mathfrak{sl}_2$ di dimensione $\lambda + 1$. Denoteremo tale rappresentazione $V^{(\lambda)}$.

Esercizio 4.48. *Siano x, y due indeterminate e consideriamo $W := \mathbf{C}[x, y]$. Sia $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

$$W^\lambda := \{p(x, y) \in W \mid p(x, y) \text{ è omogeneo di grado } \lambda\}.$$

*Allora abbiamo una rappresentazione (**Verificare che lo sia effettivamente!**) di $\mathfrak{sl}_2$*

$$\rho : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(W^\lambda)$$

data da

$$e \mapsto x\frac{\partial}{\partial y}, \quad f \mapsto y\frac{\partial}{\partial x}, \quad h \mapsto x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Dare un isomorfismo esplicito tra W^λ e $V^{(\lambda)}$.

Riferimenti bibliografici

[1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*,
[2] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory – A first course*, ...
[3] J. Goedecke, *Category Theory*, https://www.dpmms.cam.ac.uk/ jg352/pdf/CategoryTheoryNotes.pdf
[4] J. Humphreys, Introduction to Lie algebras
[5] S. Lang, Algebra
[6] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics (1978)