1. *Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Indichiamo con $\cap$, $\cup$ e $^-$ rispettivamente le operazioni di intersezione, unione e complementare in $\mathcal{P}(X)$. Verificare che $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, ^-)$ è un'algebra di Boole (verificare che sono soddisfatti gli assiomi).*

Sol. Dobbiamo verificare che:
(a) le operazioni $\cap, \cup$ sono commutative:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X): \qquad A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

Verifichiamo la prima identità:
$x \in A \cup B$ se e solo $x \in A$ oppure $x \in B$ se e solo se $x \in B$ oppure $x \in A$ se e solo se $x \in B \cup A$.
La seconda è del tutto simile.

(b) le operazioni $\cap, \cup$ sono distributive:

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X): \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Verifichiamo la prima identità:
$x \in A \cup (B \cap C)$ se e solo se $x \in A$ oppure $x \in B \cap C$ se e solo se $x \in A$ oppure $\begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases}$ se e solo se $\begin{cases} x \in A \text{ oppure } x \in B \\ x \in A \text{ oppure } x \in C \end{cases}$ se e solo se $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$ se e solo se $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
La seconda si dimostra in modo simile.

(c) le operazioni $\cap, \cup$ hanno un elemento neutro: cioè esistono "O" e "I" $\in \mathcal{P}(X)$ tali che

$$\forall A \in \mathcal{P}(X): \qquad A \cup O = A, \qquad A \cup I = A.$$

L'elemento neutro di $\cup$ è l'insieme vuoto $\emptyset$: infatti $A \cup \emptyset = A$, $\forall A$;
L'elemento neutro di $\cap$ è tutto l'insieme X: infatti $A \cap X = A$, $\forall A$.

(d) le operazioni $\cap, \cup$ hanno la proprietà del complemento:

$$\forall A \in \mathcal{P}(X): \qquad A \cup \bar{A} = I, \qquad A \cap \bar{A} = O$$

In questo caso è immediato che $\forall A \in \mathcal{P}(X): \qquad A \cup \bar{A} = X, \qquad A \cap \bar{A} = \emptyset.$

2. *Dato un numero naturale n, si denoti $\mathbf{D}_n = \{m \in \mathbf{N} : m \text{ divide } n\}$. Supponiamo che $n = p_1 p_2 \cdot p_k$ sia prodotto di k primi distinti. Dato $a \in \mathbf{D}_n$, si definisca $\bar{a} := \frac{n}{a}$.*
(a) Verificare che $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, ^-)$ è un'algebra di Boole con 2^k elementi.
(b) Sia $X = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Verificare che l'applicazione

$$f\colon \mathbf{D}_n \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad k = p_{i_1} \ldots p_{i_\alpha} \mapsto \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_\alpha}\}$$

è un isomorfismo di algebre di Boole (ossia un'applicazione biiettiva che rispetta le operazioni delle due algebre).

Sol. **(a)** Poiché per ogni $a, b \in D_n$, gli interi $mcm(a,b)$, $mcd(a,b)$, $\bar{a} = n/a$ sono ognuno prodotto di divisori di n, si ha che D_n è chiuso rispetto alle operazioni $mcd, mcm, ^-$. Verifichiamo gli assiomi (a), (b), (c), (d) elencati nell'esercizio 1.

(a) È evidente dalla definizione di mcm e mcd che

$$\forall a, b \in D_n \quad mcm(a,b) = mcm(b,a), \quad mcd(a,b) = mcd(b,a).$$

(b) Dimostriamo che $\forall a, b, c \in D_n$

$$mcm(a, mcd(b,c)) = mcd(mcm(a,b), mcm(a,c)).$$

Un primo p divide $mcm(a, mcd(b,c))$ se e solo se p divide a oppure p divide $mcd(b,c)$ se e solo se p divide a oppure p divide sia b che c.

Questo equivale a dire che si verificano simultaneamente $\begin{cases} p \text{ divide } a \text{ oppure } p \text{ divide } b \\ p \text{ divide } a \text{ oppure } p \text{ divide } c \end{cases}$ che a sua volta equivale a $\begin{cases} p | mcm(a,b) \\ p | mcm(a,c) \end{cases}$.

Ne segue che p divide $mcd(mcm(a,b), mcm(a,c))$.

Viceversa, un primo p divide $mcd(mcm(a,b), mcm(a,c))$ se e solo se divide sia $mcm(a,b)$ che $mcm(a,c)$, cioè p divide a oppure divide sia b che c. Dunque p divide a oppure $mcd(b,c)$, ossia p divide $mcm(a, mcd(b,c))$.

Poiché $mcm(a, mcd(b,c))$ e $mcd(mcm(a,b), mcm(a,c))$ hanno esattamente gli stessi divisori primi (e in questo caso i primi compaiono tutti con esponente 1), concludiamo che sono uguali.

L'identità: $\forall a, b, c \in D_n \quad mcd(a, mcm(b,c)) = mcm(mcd(a,b), mcd(a,c))$
si dimostra in modo simile.

Osservazione importante. Analoghe dimostrazioni funzionano per dimostrare che *il reticolo D_n dei divisori di un intero positivo qualunque è distributivo*. Basta infatti rimpiazzare p con la massima potenza p^d di p che divide n.

(c) Poiché

$$\forall a \in D_n \quad mcm(a,1) = a, \quad mcd(a,n) = a$$

l'elemento neutro del mcm è 1 e quello del mcd è n.

(d) Poiché *n è prodotto di k primi distinti*, un divisore primo di n divide a se e solo se non divide n/a. Ne segue che

$$\forall a \in D_n \quad mcm(a, n/a) = n, \quad mcd(a, n/a) = 1,$$

cioè vale la proprietà del complemento.

Osservazione importante. In questo caso abbiamo usato il fatto che *n è prodotto di k primi distinti*. In caso contrario, *il reticolo D_n non è complementato*.

(b) Direttamente dalle definizioni di D_n e $\mathcal{P}(p_1, \ldots, p_k)$ è immediato che f è biiettiva. Facciamo vedere che f rispetta le operazioni delle algebre, cioè

$$f(mcm(a,b)) = f(a) \cup f(b), \quad f(mcd(a,b)) = f(a) \cap f(b), \quad f(n/a) = \overline{f(a)}.$$

Siano $a = p_{i_1} \ldots p_{i_\alpha}$ e $b = p_{i_1} \ldots p_{i_\beta}$ le decomposizioni di a e b in fattori primi. È chiaro che $mcm(a,b)$ è il prodotto dei fattori primi distinti che compaiono nella decomposizione di a o in quella di b, cioè dei fattori di $f(a) \cup f(b)$. Similmente $mcd(a,b)$ è il prodotto dei fattori primi comuni ad a e b, cioè dei fattori in $f(a) \cap f(b)$. Poiché n è prodotto di primi distinti, n/a si decompone esattamente nei fattori primi di n che non dividono a, ossia nei fattori di $f(a)$.

3. *Sia dato l'insieme* $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ *con le operazioni* $\oplus$, $\otimes$ *e* $^-$ *definite nel seguente modo:*

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 1,$$

$$1 \otimes 1 = 1, \quad 1 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 0 \otimes 0 = 0, \quad \bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0.$$

Dimostrare che $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, ^-)$ *è un'algebra Booleana (verificare che soddisfa gli assiomi).*

Sol. Verifichiamo gli assiomi (a), (b), (c), (d) elencati nell'esercizio 1.
(a) Direttamente dalle definizioni si ha $a \oplus b = b \oplus a, \quad a \otimes b = b \otimes a, \ \forall a, b \in \mathcal{A}$;

(b) Sia $a = 0$. Abbiamo $0 \oplus (b \otimes c) = b \otimes c = (0 \oplus b) \otimes (0 \oplus c)$;
Sia $a = 1$. Abbiamo $1 \oplus (b \otimes c) = 1 = (1 \oplus b) \otimes (1 \oplus c) = 1 \otimes 1 = 1$.
Dunque vale $a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c), \ \forall a, b, c \in \mathcal{A}$.

Sia $a = 0$. Abbiamo $0 \otimes (b \oplus c) = 0 = (0 \otimes b) \oplus (0 \otimes c) = 0 + 0 = 0$;
Sia $a = 1$. Abbiamo $1 \otimes (b \oplus c) = b \oplus c = (1 \otimes b) \oplus (1 \otimes c) = b \oplus c$.
Dunque vale $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c), \ \forall a, b, c \in \mathcal{A}$.

(c) Direttamente dalle definizioni si ha che 0 è l'elemento neutro della somma e 1 è l'elemento neutro del prodotto.

(d) Direttamente dalle definizioni si vede che vale anche la proprietà del complemento $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$ e $1 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 0$.

4. *Sia dato l'insieme* $\mathcal{A} = \{000, 010, 001, 100, 110, 101, 011, 111\}$ *con le operazioni definite cifra per cifra come nell'esercizio precedente*
   (a) Qual è l'identità per $\oplus$*?*
   (b) Qual è l'identità per $\otimes$*?*
   (c) Calcolare le seguenti espressioni:

$$(001 \otimes 001) \oplus 100 \qquad (111 \oplus 001) \oplus 100 \qquad (001 \otimes \overline{001}) \oplus \overline{101 \otimes 010}.$$

   (d) Dimostrare che $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, ^-)$ *è un'algebra Booleana (verificare che soddisfa gli assiomi).*
   (e) Un'algebra di Boole, con le stesse operazioni, è anche un reticolo Booleano. Determinare la relazione di ordine parziale corrispondente, definita da x"$\leq$"y *se* $x \otimes y = x$.

Sol.
(a) L'identità per $\oplus$ è la stringa 000: infatti $xyz \oplus 000 = xyz$, per ogni stringa xyz.
(b) L'identità per $\otimes$ è la stringa 111: infatti $xyz \otimes 111 = xyz$, per ogni stringa xyz.
(c) $(001 \otimes 001) \oplus 100 = 001 \oplus 100 = 101, \qquad (111 \oplus 001) \oplus 100 = 111 \oplus 100 = 111,$

$(001 \otimes \overline{001}) \oplus \overline{101 \otimes 010} = (001 \otimes 110) \oplus \overline{000} = 000 \oplus 111 = 111.$

(d) Abbiamo dimostrato gli assiomi per le operazioni sulle strighe di lunghezza 1. Poiché le operazioni sono definite coordinata per coordinata, gli assiomi sono soddisfatti anche dalle operazioni sulle stringhe di lunghezza arbitraria.

(e) Cominciamo con stringhe di lunghezza 1.
Se $x = 0$, allora

$$0\text{"} \leq \text{"}y \text{ se } 0 \otimes y = 0$$

è sempre verificata;
se $x = 1$, allora

$$1\text{"} \leq \text{"}y \text{ se } 1 \otimes y = 1$$

è verificata se solo se $y = 1$.

Poiché le operazioni sono definite coordinata per coordinata, date due stringhe di lunghezza arbitraria x, y si ha che x"$\leq$"y se e solo se la disuguaglianza è soddisfatta da tutte le coordinate. In caso contrario, le stringhe non sono confrontabili.

5. *Sia $\mathcal{B}$ l'insieme dei sottoinsiemi $B \subset \mathbf{N}$ che soddisfano una delle seguenti condizioni: la cardinalità di B è finita oppure la cardinalità del complementare di B è finita. Dimostrare che $(\mathcal{B}, \cap, \cup, ^-)$ è un'algebra di Boole.*

Sol. Osserviamo che $\mathcal{B}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(\mathbf{N})$, che con le operazioni $\cap, \cup, ^-$ è un'algebra di Boole. Dunque per dimostrare la tesi è sufficiente dimostrare che $\mathcal{B}$ è chiuso rispetto a $\cap, \cup, ^-$.

• $\cup$: Siano $X, Y \in \mathcal{B}$. Se X, Y sono finiti $X \cup Y$ è finito e dunque appartiene a $\mathcal{B}$. Se almeno uno dei due è infinito (e dunque il suo complementare è finito), il suo complementare $C_{\mathbf{N}}(X \cup Y) = C_{\mathbf{N}}X \cap C_{\mathbf{N}}Y$ è finito. Dunque anche in questo caso $X \cup Y \in \mathcal{B}$.

• $\cap$: Siano $X, Y \in \mathcal{B}$. Se almeno uno dei due è finito, allora $X \cap Y$ è finito e $X \cap Y \in \mathcal{B}$. Se entrambi sono infiniti, allora entrambi i complementari sono finiti e $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ è finito. Da cui segue che anche in questo caso $X \cap Y \in \mathcal{B}$.

• $^-$: Siano $X \in \mathcal{B}$. Se X è infinito, allora $\overline{X}$ è finito e dunque $\overline{X} \in \mathcal{B}$. Se X è finito, allora $\overline{X}$ è infinito ma il suo complementare $\overline{(\overline{X})}$ è finito. Dunque anche in questo caso $\overline{X} \in \mathcal{B}$.

6. *Dimostrare che le algebre di Boole $(\mathcal{P}(\mathbf{N}), \cap, \cup, ^-)$ e $(\mathcal{P}(\mathbf{R}), \cap, \cup, ^-)$ non possono essere isomorfe.*

Sol. Questo segue dal fatto che $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ e $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ hanno cardinalità diverse: infatti $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ ha la cardinalità di $\mathbf{R}$ e $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ ha cardinalità superiore.

7. *Sia $(\mathcal{P}, \wedge, \vee, \neg)$ l'algebra di Boole del calcolo proposizionale.*
   (a) Verificare che le operazioni $\wedge$ e $\vee$ sono associative;
   (b) Un'algebra di Boole, con le stesse operazioni, è anche un reticolo Booleano. Verificare che la relazione di ordine parziale definita da A"$\leq$"B se $A \wedge B \Leftrightarrow A$ equivale a A"$\leq$"B se $A \Rightarrow B$. In altre parole, verificare che gli enunciati $A \wedge B \Leftrightarrow A$ e $A \Rightarrow B$ sono logicamente equivalenti.

Sol. Basta calcolare le rispettive tabelle di verità e verificare che coincidono:

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \Leftrightarrow A$	$A \Rightarrow B$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

8. *Sia $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, ^-)$ un'algebra Booleana.*
   (a) In un'algebra booleana valgono le Leggi di De Morgan:
   $$\overline{(x \oplus y)} = \overline{x} \otimes \overline{y}, \qquad \overline{x \otimes y} = \overline{x} \oplus \overline{y}.$$
   Enunciare Leggi di De Morgan per le algebre di Boole degli esercizi 1, 2 e 7.
   (b) In un'algebra booleana valgono le Leggi di assorbimento:
   $$a \otimes (a \oplus b) = a, \quad a \oplus a \otimes b = a.$$
   Enunciare Leggi di assorbimento per le algebre di Boole degli esercizi 1, 2 e 7.
   (c) In un'algebra booleana valgono le Leggi di idempotenza:

$$a \oplus a = a, \quad a \otimes a = a.$$

Enunciare Leggi di idempotenza per le algebre di Boole degli esercizi 1, 2 e 7.

Sol. (a)

$$C_X(A \cup B) = C_X A \cap C_X B, \qquad C_X(A \cap B) = C_X A \cup C_X B$$

$$\frac{n}{mcm(a,b)} = mcd(\frac{n}{a}, \frac{n}{b}), \qquad \frac{n}{mcd(a,b)} = mcm(\frac{n}{a}, \frac{n}{b})$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B, \qquad \neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B.$$

(b)

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$$

$$mcm(a, mcd(a,b)) = a, \qquad mcd(a, mcm(a,b)) = a$$

$$A \wedge (A \vee B) = A, \quad A \vee (A \wedge B) = A$$

(c)

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A$$

$$mcm(a,a) = a, \qquad mcd(a,a) = a$$

$$A \wedge A = A, \qquad A \vee A = A$$

9. *In un'algebra di Boole $(A, +, \cdot, ')$, dove $x+y$ denota la somma di due elementi, xy il prodotto e x' il complemento, scrivere ognuna delle seguenti espressioni come somma di prodotti completata:*
   (a) $x'y((zt)' + x')'$; *(b)* $(x + x'y + xy'z)(x'z)$; *(c)* $x + x'yz$;
   (d) $(xy')'(xz + yz')'$; *(e)* $(xyz)'(x + y + z)'$; *(f)* $x(y + z)' + y'(xz)'$.

Sol. La somma di prodotti completa è unica. Diamo per scontato che le singole espressioni siano funzioni delle variabili che "si vedono" (l'espressione $E = xy$ è completa come funzione delle variabili x, y ma non come funzione delle variabili x, y, z).
(a) $E(x,y,z,t) = x'y((zt)' + x')' = x'yztx = 0$ (non c'è niente da completare).
(b) $E(x,y,z) = (x + x'y + xy'z)(x'z) = xx'z + x'yz + xy'zx'z = x'yz$ è completa;
(c) $E(x,y,z) = x + x'yz = x(y + y')(z + z') = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz$ somma di prodotti completa.
(d) $(xy')'(xz + yz')' = (x' + y)((xz)'(yz')') = (x' + y)((x' + z')(y' + z)) =$
$(x' + y)(x'y' + x'z + z'y' + z'z) = (x' + y)(x'y' + x'z + z'y') = x'y' + x'z + x'y'z' + x'yz =$
$= x'y'(z + z') + x'z(y + y') + x'y'z' + x'yz = x'y'z + x'y'z' + x'yz + x'y'z + x'y'z' + x'yz =$
$x'y'z + x'y'z' + x'yz$.
Le altre si ottengono in modo simile.

10. *In un'algebra di Boole $(A, +, \cdot, ')$,*
    (1) scrivere le seguenti espressioni come somma di prodotti completata:

$$(a)\ x'y((zt)' + x')'; \qquad (b)\ (x + x'y + xy'z)(x'z); \qquad (c)\ x + x'yz.$$

(2) scrivere le seguenti espressioni come somma di implicanti primi:

$$(a)\ xyz + xy'z + x'yz + x'y'z + x'y'z'; \qquad (b)\ txyz' + tx'yz + tx'yz' + t'xyz + t'xy'z + t'x'yz + t'x'y'$$

(3) scrivere le seguenti espressioni in forma minimale:

$(a)\ x'y+x'y';\quad (b)\ xy+xy';\quad (c)\ xy+xy'+x'y+xy';\quad (d)\ xyz+xy'z+x'yz+x'y'z+x'y'z'.$

Sol.
(3) (a) $x'y + x'y' = x'(y + y') = x'$. La forma x' è minimale: meno di cosi' non si può...
(b) $xy + xy' = x(y + y') = x$ minimale.
(c) $xy + xy' + x'y + xy' = xy + x'y + xy' = x'y + x(y + y') = x'y + x$. Il consenso tra gli ultimi due monomi è $Q = y$. Ne segue che $x'y + x = x'y + x + y = x + y(x' + 1) = x + y$ è somma di tutti gli implicanti primi.
Completando i monomi troviamo $x(y + y')(z + z') + (x + x')y(z + z') = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xyz + xyz' + x'yz + x'yz'$, da cui si deduce che nessun implicante primo è superfluo e che $x + y$ è una forma minimale.
(d) $xyz + xy'z + x'yz + x'y'z + x'y'z' = xz(y + y') + x'z(y + y') + x'y'z' = xz + x'z + x'y'z' = (x + x')z + x'y'z' = z + x'y'z'$. Il consenso fra gli ultimi due termini è $x'y'$, da cui segue che $z + x'y'z' = z + x'y'z' + x'y' = z + x'y'$ è somma di tutti gli implicanti primi. Completando i monomi troviamo $z + x'y' = (x + x')(y + y')z + x'y'(z + z') = etc....$ da cui risulta già chiaro che nessuno dei due implicanti primi è superfluo. In particolare $z + x'y'$ è una forma minimale.

11. *Nell'algebra di Boole dell'esercizio 1, si considerino le espressioni booleane*

$$E(A, B, C) = A \cap B \bigcup A \cap C, \quad F(A, B, C) = A \cap B \cap C \bigcup B.$$

(a) Disegnare i diagrammi di Venn delle due espressioni;
(b) Determinare se E ed F sono somma di implicanti primi (aiutarsi col disegno).

Sol. (b) L'espressione $E(A, B, C) = A \cap B \bigcup A \cap C$ è somma di implicanti primi:
per semplicità scriviamo E nella notazione $(A, +, \cdot, ')$, cioè come $E = ab + ac$. Poiché il metodo del consenso non ha passi non banali, E è appunto somma di tutti i suoi implicanti primi.
Per definizione un implicante primo è un monomio P di E con le proprietà che $E + P = E$, ma nessun sottoprodotto di P ha la stessa proprietà.
Esaminiamo $P = ab$: si può verificare, che $E + a = a \neq E$ e $E + b = b + ac \neq E$. Si può fare ad esempio completando i prodotti, ma anche guardando i diagrammi disegnati al punto (a).
Esaminiamo $P = ac$: si può verificare, che $E + a = a \neq E$ e $E + c = c + ab \neq E$. Si può fare ad esempio completando i prodotti, ma anche guardando i diagrammi disegnati al punto (a).

L'espressione $F(A, B, C) = A \cap B \cap C \bigcup B$ non è somma di implicanti primi:
per semplicità scriviamo F nella notazione $(A, +, \cdot, ')$, cioè come $F = abc + b = b$. In questo caso b è l'unico implicante primo di F.
Guardare il diagramma disegnato al punto (a): unendo a B uno qualunque fra $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, A, C si trova sempre un insieme diverso da $F = B$.

12. *Nell'algebra di Boole dell'esercizio 7, si consideri l'espressione booleana*

$$E(A, B, C) = A \bigvee \neg(A \wedge \neg B \bigvee \neg A \wedge B \bigvee \neg(B \wedge C)).$$

(a) Esprimere $E(A, B, C)$ come somma di prodotti;
(b) Determinare un'espressione minimale di $E(A, B, C)$.

Sol. Per semplicità di calcolo riscriviamo l'espressione E nella notazione $(A,+,\cdot,')$; poi alla fine del calcolo ritorneremo alla notazione iniziale:

$E\ \ a+(ab'+a'b+(bc)')' = a+(ab')'(a'b)'(bc)'' = a+(a'+b)(a+b')bc = a+(a'a+a'b'+ba+bb')bc =$
$= a+(a'b'+ba)bc = a+abc = a(1+bc) = a.$

Dunque $E: \ A$ è sia somma di prodotti (non completa) che minimale.

Ad ogni modo si può fare anche così:

$A \bigvee \neg(A\wedge\neg B \bigvee \neg A\wedge B \bigvee \neg(B\wedge C)) \Leftrightarrow A \bigvee \neg(A\wedge\neg B) \bigwedge \neg(\neg A\wedge B) \bigwedge \neg\neg(B\wedge C) \Leftrightarrow$
$A \bigvee (\neg A\vee B) \bigwedge (A\vee\neg B) \bigwedge (B\wedge C) \Leftrightarrow A \bigvee (\neg A\wedge A \ \vee \ \neg A\wedge\neg B \ \vee \ B\wedge A \ \vee \ B\wedge\neg B) \bigwedge (B\wedge C) \Leftrightarrow$
$A \bigvee (\neg A\wedge\neg B \ \vee \ B\wedge A) \bigwedge (B\wedge C) \Leftrightarrow$
$A \bigvee (B\wedge A) \bigwedge (B\wedge C) \Leftrightarrow$
$A \bigvee (B\wedge A\wedge B\wedge C) \Leftrightarrow A \ \bigvee \ A\wedge B\wedge C \Leftrightarrow$
$A \ \bigvee \ (\mathcal{T}\vee B\wedge C) \Leftrightarrow A$ (dove $\mathcal{T}$ indica una tautologia).

13. *In un'algebra di Boole* $(A,+,\cdot,')$, *siano date le espressioni*

$$E: \quad xy'z+y'z'+xy'z', \qquad F: \quad xyz+x'y+xz.$$

(a) determinare se E ed F sono equivalenti;
(b) determinare se sono somma di implicanti primi;
(c) determinare se sono minimali.

Sol. (a) Per poter confrontare due espressioni booleane è necessario portarle in una delle due forme che la determinano univocamente: la somma di prodotti completa oppure la somma di tutti gli implicanti primi. Completando E ed F troviamo rispettivamente

$$E = xy'z+xy'z'+x'y'z'+xy'z', \qquad F = xyz+x'yz+x'yz'+xyz+xy'z,$$

il che dimostra che non sono equivalenti.

(b) Una espressione booleana è somma di tutti gli implicanti primi se il "consenso" di tutte le sue coppie di monomi è nullo.
Sia $E: \ xy'z+y'z'+xy'z$. Il consenso fra $xy'z$ e $y'z'$ è $Q = xy'$. Da cui $E: \ xy'z+y'z'+xy'z+xy' = xy'z+y'z'+xy'$. A questo punto il consenso di tutte le sue coppie di monomi è nullo e $xy'z+y'z'+xy'$ è la somma di tutti gli implicanti primi di E. Evidentemente l'espressione originaria non lo era.
Per vedere se $xy'z+y'z'+xy'$ è o meno minimale, bisogna prima completarla e poi vedere se ci sono implicanti primi superflui:

$$xy'z+y'z'+xy' = xy'z \ + \ xy'z'+x'y'z' \ + \ xy'z+xy'z'$$

da cui si vede che gli ultimi due termini sono gia' inclusi fra gli altri. Dunque l'implicante primo xy' è superfluo ed una forma minimale di E è data da $xy'z+y'z'$.
Anche il primo implicante primo $xy'z$ è gia' incluso fra gli altri. Alternativamente avremmo anche potuto eliminare lui ed ottenere la foma minimale $y'z'+xy'$. Come si vede la forma minimale non è unica.
Analogamente si fa con F, etc....