1. Per le seguenti relazioni R di $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ stabilire quali sono simmetriche, riflessive o transitive.
   (a) $R = \{(n,m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n = m\}$; (b) $R = \{(n,m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : |n-m| = 5\}$;
   (c) $R = \{(n,m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n \geq m\}$; (d) $R = \{(n,m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n^2 \equiv m^2 \pmod 7\}$.

Sol. Ricordiamo che una relazione R su un insieme X, vista come sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times X$, è riflessiva se $(x,x) \in R$, per ogni $x \in X$; è simmetrica se $(x,y) \in R$ implica $(y,x) \in R$; è transitiva se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$ implicano $(x,z) \in R$.
(a) $R = \{(m,m) \mid m \in \mathbf{Z}\}$. La relazione è riflessiva. In realtà si vede che un elemento $m \in \mathbf{Z}$ è in relazione solo con se stesso, per cui R è banalmente simmetrica e transitiva (non c'è niente da verificare).
(b) $R = \{(n,m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : \ |n-m| = 5\}$. La relazione non è riflessiva: $(n,n) \notin R$, in quanto $|n-n| = 0 \neq 5$. La relazione è simmetrica: infatti $|n-m| = |m-n|$ e questo ci assicura che se $(n,m) \in R \Leftrightarrow |n-m| = 5$, allora anche $|m-n| = 5$ e dunque $(m,n) \in R$. La relazione non è transitiva: infatti $(5,10) \in R$, $(10,15) \in R$, mentre $(5,15) \notin R$.
(c) La relazione R è riflessiva: $\forall\ m \in \mathbf{Z}$ vale $m \geq m$ e dunque $(m,m) \in R$. La relazione R non è simmetrica: ad esempio $(4,3) \in R$ ma $(3,4) \notin R$. La relazione R è transitiva: infatti se $n \geq m$ (cioè nRm) ed $m \geq p$ (cioè mRp) allora anche $n \geq p$ (cioè nRp).
(d) La relazione R è riflessiva: per ogni $m \in \mathbf{Z}$ vale $m^2 \equiv m^2 \bmod 7$, ossia $m^2 = m^2 + k7$, per qualche $k \in \mathbf{Z}$. Dunque $(m,m) \in R$. La relazione R è simmetrica: mRn, cioè $m^2 \equiv n^2 \bmod 7$ ossia $m^2 = n^2 + k7$, per qualche $k \in \mathbf{Z}$, implica $n^2 = m^2 + k7$, per qualche $k \in \mathbf{Z}$. Ciò equivale a $n^2 \equiv m^2 \bmod 7$, cioè nRm. La relazione R è transitiva: se mRn, cioè $m^2 = n^2 + k7$, per qualche $k \in \mathbf{Z}$, ed nRp, cioè $n^2 = p^2 + h7$, per qualche $h \in \mathbf{Z}$, allora vale $m^2 = n^2 + k7 = p^2 + h7 + k7 = p^2 + (k+h)7$. In altre parole, $m^2 \equiv p^2 \bmod 7$ ed nRp, come richiesto.

2. Sia $X = \{1,2,3,4\}$.
   (a) Esibire una relazione su di X, che sia riflessiva, simmetrica, ma non transitiva.
   (b) Esibire una relazione su di X, che sia simmetrica, transitiva ma non riflessiva.
   (c) Esibire una relazione su di X, che sia riflessiva, transitiva, ma non simmetrica.

Sol.
(a) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,4),(4,1)\}$. In questo caso $1R2$, $2R3$ ma non vale $1R3$.
(b) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1)\}$. In questo caso non vale $4R4$.
(c) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(2,4),(4,2)\}$. In questo caso $1R2$, ma non vale $2R1$.

3. Sia $X = \{1,2,3,\ldots,30,31\}$. Consideriamo su X la relazione: xRy *se le date* x *e* y *del gennaio 2010 cadono nello stesso giorno della settimana (lunedi', martedi', etc...)* Dimostrare che R è una relazione di equivalenza e determinare le classi di equivalenza corrispondenti.

Sol. Chiaramente R è riflessiva: x e x cadono nello stesso giorno della settimana. R è simmetrica: se x e y cadono nello giorno della settimana, allora lo stesso vale per y e x. R è transitiva: se x e y cadono nello giorno della settimana e y e z cadono nello giorno della settimana, allora anche x e z cadono nello giorno della settimana. Le classi di equivalenza sono 7, tante quante i giorni della settimana. Ad esempio, se il giorno 1 gennaio 2010 cade di lunedi', allora le classi di equivalenza sono date da *lunedi'*$=\{1,8,15,22,29\}$, *martedi'*$=\{2,9,16,23,30\}$, *mercoledi'*$=\{3,10,17,24,31\}$, *giovedi'*$=\{4,11,18,25\}$, *venerdi'*$=\{5,12,19,26\}$, *sabato*$=\{6,13,20,27\}$, *domenica*$=\{7,14,21,28\}$.

4. Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
   (i) Consideriamo su X la relazione: xRy *se* $x + y$ *è un numero pari.* Dimostrare che R è una relazione di equivalenza e determinare le classi di equivalenza corrispondenti.
   (ii) Consideriamo su X la relazione: xRy *se* $x + y$ *è un numero dispari.* Determinare se R è una relazione di equivalenza.

Sol. (a) R è riflessiva: $x+x = 2x$ è sempre pari. R è simmetrica: se $x+y$ è pari anche $y+x = x+y$ è pari. R è transitiva: osserviamo che la somma di due numeri è pari se e solo se sono entrambi pari o entrambi dispari. Se $x + y$ è pari e $y + z$ è pari, si ha che x, y, z sono tutti e tre pari o tutti e tre dispari. Ne segue che $x + z$ è pari. Questa relazione non è altro che la congruenza modulo 2.
(b) In questo caso R è simmetrica, ma non è né riflessiva né transitiva. Infatti la somma di un numero con se stesso è sempre pari. Inoltre la somma di due numeri è dispari se e solo se sono uno pari e uno dispari. Se x, z sono pari ed y è dispari, si ha che $x + y$, e $y + z$ sono dispari e dunque xRy e yRz, ma non vale xRz perche' $x + z$ è pari.

5. Sia $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e sia $R = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A : a + d = b + c\}$.
   (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Sia $\tilde{A}$ = l'insieme delle classi di equivalenza di R. Dimostrare che la mappa $f : \tilde{A} \longrightarrow \mathbf{Z}$ che associa la differenza $a - b$ alla classe di (a, b), è ben definita ed è una biezione.

Sol. (a) Per definizione di R, due coppie $(a, b), (c, d) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sono in relazione se

$$a + d = b + c \;\Leftrightarrow\; a - b = c - d.$$

R è riflessiva: $(a, b)R(a, b)$ in quanto $a - b = a - b$. R è simmetrica: se $(a, b)R(c, d)$, ossia se $a - b = c - d$, allora anche $(c, d)R(a, b)$ in quanto $c - d = a - b$. R è transitiva: se $(a, b)R(c, d)$, ossia se $a - c = b - d$, e $(c, d)R(m, n)$, ossia se $c - d = m - n$, allora anche $(a, b)R(m, n)$. Infatti $a - b = m - n$.
(b) Una classe di equivalenza rispetto ad R contiene tutte e sole le coppie $(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ le cui coordinate hanno la stessa differenza $M = a-b$. Le classi di equivalenza sono tante quanti gli interi $\mathbf{Z}$: infatti per ogni intero $M \in \mathbf{Z}$ la classe di equivalenza corrispondente è formata dalle coppie $\{(x + M, x),\ x \in \mathbf{N}\}$. Da queste osservazioni segue che la mappa $f : \tilde{A} \longrightarrow \mathbf{Z}$, che ad una classe di equivalenza

$$\overline{(a, b)} = \{(x + M, x),\ x \in \mathbf{N},\ M = a - b\}$$

associa l'intero M è ben definita (per calcolare l'immagine di una classe tramite f basta prendere un elemento a caso $(x + M, x)$ nella classe stessa e calcolare $x + M - x = M$), iniettiva (le coppie appartenenti a due classi di equivalenza distinte hanno la differenza fra le coordinate diversa e quindi hanno immagini diverse tramite f) e suriettiva (abbiamo appena osservato che ad ogni intero M corrisponde una classe di equivalenza). In conclusione f definisce una biiezione fra l'insieme delle classi di equivalenza di R su $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e gli interi $\mathbf{Z}$.

6. Sia $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e sia $R = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A : ad = bc\}$.
   (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Sia $\tilde{A}$ = l'insieme delle classi di equivalenza di R. Dimostrare che la mappa $f : \tilde{A} \longrightarrow \mathbf{Q}_{>0}$ che associa la frazione a/b alla classe di (a, b), è ben definita ed è una biezione.

Sol. (a) Sia $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Per definizione di R, due coppie $(a, b), (c, d) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sono in relazione se

$$ad = bc \;\Leftrightarrow\; a/b = c/d.$$

R è riflessiva: $(a,b)R(a,b)$ in quanto $a/b = a/b$. R è simmetrica: se $(a,b)R(c,d)$, ossia se $a/b = c/d$, allora anche $(c,d)R(a,b)$ in quanto $c/d = a/b$. R è transitiva: se $(a,b)R(c,d)$, ossia se $a/b = c/d$, e $(c,d)R(m,n)$, ossia se $c/d = m/n$, allora anche $(a,b)R(m,n)$. Infatti $a/b = m/n$.
(b) Sia $(a,b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. La classe di equivalenza di (a,b) è data da

$$\overline{(a,b)} = \{(yM, y) : \ M = a/b, \ y \in \mathbf{N}\}$$

e contiene tutte e sole le coppie (x,y) il cui rapporto x/y è uguale a $M = a/b$. Osserviamo che $M \in \mathbf{Q} > 0$. Le classi di equivalenza sono tante quanti i razionali positivi $\mathbf{Q} > 0$: infatti dato $M \in \mathbf{Q} > 0$, la classe corrispondente è data da $\{(yM, y) : \ M \in \mathbf{Q} > 0, \ y \in \mathbf{N}\}$. Consideriamo adesso l'applicazione $f : \tilde{A} \longrightarrow \mathbf{Q}$, $f(\overline{(a,b)}) = M$, che ad una classe di equivalenza associa il rapporto fra la prima e la seconda coordinata di un suo qualunque elemento. f è ben definita (per calcolare l'immagine di una classe tramite f basta prendere un elemento a caso (xM, x) nella classe stessa e calcolare $xM/x = M$), iniettiva (le coppie appartenenti a due classi di equivalenza distinte hanno il rapporto fra le coordinate diverso e quindi hanno immagini diverse tramite f) e suriettiva (abbiamo appena osservato che ad ogni razionale positivo M corrisponde la classe di equivalenza $\{(yM, y) : \ M \in \mathbf{Q} > 0, \ y \in \mathbf{N}\}$). In conclusione f definisce una biiezione fra l'insieme delle classi di equivalenza di R su $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e i razionali positivi $\mathbf{Q} > 0$.

7. Dato l'insieme $A = \{x, y, z\}$, dire quali delle seguenti sono partizioni di A:

$$[\emptyset, \{x,z\}, \{y\}], \quad [\{y\}, \{x,y,z\}], \quad [\{x,z\}, \{y,z\}], \quad [\{x\}, \{z,x\}], \quad [\{x\}, \{y\}], \quad [\{x\}, \{y\}, \{z\}].$$

Sol. Sia A un insieme. Una partizione di A è una "suddivisione" degli elementi di A in sottoinsiemi non vuoti e disgiunti:

$$A = \cup_j A_j, \qquad A_j \neq \emptyset, \quad A_i \cap A_j = \emptyset.$$

La prima non è una partizione di A: il sottoinsieme di A formato dall'insieme vuoto è appunto vuoto; la seconda, la terza e la quarta non sono partizioni di A, in quanto i sottoinsiemi coinvolti non sono disgiunti; la quinta non è una partizione in quanto $\{x\} \cup \{y\} \neq A$; la sesta è una partizione di A in quanto i tre sottoinsiemi $\{x\}, \{y\}, \{z\}$ sono disgiunti, non vuoti e la loro unione è tutto A: $\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\} = A$.

8. Determinare quali delle seguenti sono partizioni dell'insieme dei numeri naturali $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\}$:

$$[\{n \in \mathbf{N} \ : \ n > 5\}, \{n \in \mathbf{N} \ : \ n < 5\}], \quad [\{n \in \mathbf{N} \ : \ n > 5\}, \{0\}, \{1,2,3,4,5\}],$$

$$[\{n \in \mathbf{N} \ : \ n^2 > 11\}, \{n \in \mathbf{N} \ : \ n^2 < 11\}].$$

Sol. La prima non è una partizione di $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\}$: il numero $n = 5$ non appartiene a nessuno dei sottoinsiemi di $[\{n \in \mathbf{N} \ : \ n > 5\}, \{n \in \mathbf{N} \ : \ n < 5\}]$; la seconda è una partizione di $\mathbf{N}$: infatti $\mathbf{N} = \{n \in \mathbf{N} \ : \ n > 5\} \cup \{0\} \cup \{1,2,3,4,5\}$ e i tre sottoinsiemi sono a due a due disgiunti; la terza è una partizione di $\mathbf{N}$: infatti i due sottoinsiemi $\{n \in \mathbf{N} \ : \ n^2 > 11\}$ e $\{n \in \mathbf{N} \ : \ n^2 < 11\}$ sono disgiunti e la loro unione coincide con $\mathbf{N}$. Per verificare quest'ultima affermazione basta osservare che $\sqrt{11}$ non è un numero naturale e che quindi ogni numero naturale sta a "destra" o a "sinistra" di $\sqrt{11}$. In particolare appartiene ad uno e uno solo dei due sottoinsiemi $\{n \in \mathbf{N} \ : \ n^2 > 11\}$ e $\{n \in \mathbf{N} \ : \ n^2 < 11\}$.

9. Sia A un insieme di n elementi. Per $i = 0, 1, \ldots, n$, sia $P_i \subset \mathcal{P}(A)$ la collezione dei sottoinsiemi di A che possiedono esattamente i elementi.

(a) Dimostrare che gli insiemi P_i formano una partizione di $\mathcal{P}(A)$.

(b) Esibire una relazione di equivalenza su $\mathcal{P}(A)$ che induce la partizione della parte (a).

Sol. (a) Per ogni $i = 0, 1, \ldots, n$, l'insieme P_i è un sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{P}(A)$: infatti P_0 contiene i sottoinsiemi di A con 0 elementi, ossia il sottoinsieme vuoto, P_1 contiene tutti i sottoinsiemi di A formati da un solo elemento, $\ldots$; infine P_n contiene i sottoinsiemi di A con n elementi, cioè A stesso. Dalla definizione dei P_i è chiaro che $P_i \cap P_j = \emptyset$ e che $\mathcal{P}(A) = \cup_i P_i$. Dunque i P_i formano una partizione di $\mathcal{P}(A)$.
(b) La relazione di equivalenza su $\mathcal{P}(A)$ che induce questa partizione è la seguente: due elementi X, Y di $\mathcal{P}(A)$ (cioè due sottoinsiemi X, Y di A) sono equivalenti se hanno la stessa cardinalià:

$$X \sim Y \quad \Leftrightarrow \quad card(X) = card(Y).$$

È immediato verificare che questa è una relazione di equivalenza...

10. Quante relazioni di equivalenza distinte si possono definire sull'insieme $\{a, b, c, d\}$?

Sol. Le relazioni di equivalenza distinte sull'insieme $A = \{a, b, c, d\}$ sono tante quante le partizioni di A. Per contarle procediamo cosí: fissiamo un elemento (si può fare in 4 modi..) e consideriamo le partizioni di cui fa parte il sottoinsieme formato da quell'elemento soltanto

$$[\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}],\ [\{a\}, \{b, c\}, \{d\}],\ [\{a\}, \{b, d\}, \{c\}],\ [\{a\}, \{b\}, \{c, d\}],\ [\{a\}, \{b, c, d\}],$$

$$[\{b\}, \{a\}, \{c\}, \{d\}],\ [\{b\}, \{a, c\}, \{d\}],\ [\{b\}, \{a, d\}, \{c\}],\ [\{b\}, \{a\}, \{c, d\}],\ [\{b\}, \{a, c, d\}],$$

$$[\{c\}, \{b\}, \{a\}, \{d\}],\ [\{c\}, \{b, a\}, \{d\}],\ [\{c\}, \{b, d\}, \{a\}],\ [\{c\}, \{b\}, \{a, d\}],\ [\{c\}, \{b, a, d\}],$$

$$[\{d\}, \{b\}, \{c\}, \{a\}],\ [\{d\}, \{b, c\}, \{a\}],\ [\{d\}, \{b, a\}, \{c\}],\ [\{d\}, \{b\}, \{c, a\}],\ [\{d\}, \{b, c, a\}].$$

Fissiamo due elementi (si può fare in $\binom{4}{2} = 6$ modi..) e consideriamo le partizioni di cui fa parte il sottoinsieme formato da quei due elementi soltanto

$$[\{a, b\}, \{c\}, \{d\}],\ [\{a, b\}, \{c, d\}],$$

etc....
Se fissiamo tre elementi e consideriamo le partizioni di cui fa parte il sottoinsieme formato da quei tre elementi soltanto, tali partizioni sono state già conteggiate nel primo caso. Manca solo la partizone il cui unico sottoinsieme è tutto A. Dopo aver ELIMINATO I DOPPIONI troviamo 15 partizioni distinte. Ad esempio:
la partizione $[\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}]$ corrisponde alla relazione di uguaglianza su A: $\quad xRy$ se $x = y$;
la partizione $[\{a, b\}, \{c, d\}]$ corrisponde alla relazione di equivalenza su A che contiene aRb, cRd, etc....

11. Con $\mathcal{P}(A)$ indichiamo l'insieme delle parti di un insieme A. Sia $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$. Definiamo un ordinamento parziale su X ponendo $A \leq B$ quando $A \subset B$ per $A, B \in X$. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.

Sol. Poiché $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, abbiamo $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Si ha che

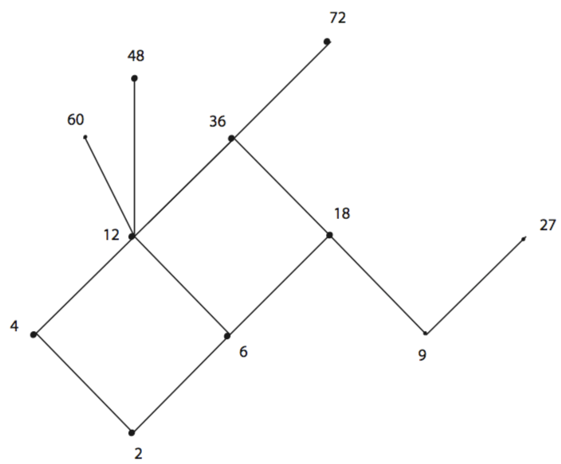
$$\emptyset \subset \{\emptyset\}.$$

Il diagramma di Hasse di questo insieme parzialmente ordinato è dato da

$$\begin{array}{cc} \{\emptyset\} & \bullet \\ & | \\ & | \\ \emptyset & \bullet \end{array}$$

12. L'insieme $\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}$ è ordinato mediante $d \leq d'$ quando d divide d'. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.
    (a) Determinare gli elementi massimali e minimali.
    (b) Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.
    (c) Trovare i maggioranti di $\{2, 9\}$ e, se esiste, $\sup(\{2, 9\})$.
    (d) Trovare i minoranti di $\{60, 72\}$ e, se esiste, $\inf(\{60, 72\})$.

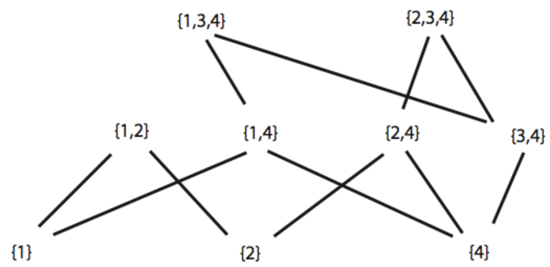
Sol. Il diagramma di Hasse di questo insieme parzialmente ordinato è dato da



(a) Gli elementi minimali sono $2, 9$; gli elementi massimali sono $60, 48, 72, 27$.
(b) Non ci sono massimo o minimo assoluti (non c'è nessun elemento confrontabile con tutti gli altri).
(c) I maggioranti di $\{2, 9\}$ sono $18, 36, 72$, il sup di $\{2, 9\}$ è 18.
(d) I minoranti di $\{60, 72\}$ sono $12, 4, 6, 2$. L'inf è 12.

13. Sia $X \subset \mathcal{P}\{1, 2, 3, 4\}$ dato da $X = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$. Definiamo un ordinamento parziale su X ponendo $A \leq B$ quando $A \subset B$ per $A, B \in X$. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.
    (a) Determinare gli elementi massimali e minimali.
    (b) Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.
    (c) Trovare i maggioranti di $\{\{2\}, \{4\}\}$ e, se esiste, $\sup(\{2\}, \{4\})$.
    (d) Trovare i minoranti di $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ e, se esiste, $\inf(\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\})$.

Sol. Il diagramma di Hasse di questo insieme parzialmente ordinato è dato da



(a) Gli elementi minimali sono $\{1\}, \{2\}, \{4\}$; gli elementi massimali sono $\{1,2\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$.

(b) Non ci sono massimo o minimo assoluti (non c'è nessun elemento confrontabile con tutti gli altri).

(c) I maggioranti $\{\{2\},\{4\}\}$ sono $\{2,4\}$ e $\{2,3,4\}$; il sup è $\{2,4\}$.

(d) I minoranti del sottoinsieme $\{\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ sono $\{3,4\}$ e $\{4\}$. L'inf. è $\{3,4\}$.

14. Si consideri su $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ l'ordinamento lessicografico:

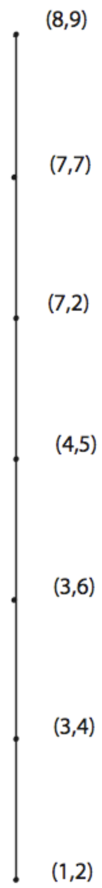
$(m,n) \leq (p,q)$ se $m < p$, oppure se $m = p$ e $n \leq q$.

(a) Dimostrare che è un ordinamento parziale.

(b) Sia $A = \{(1,2), (4,5), (7,7), (8,9), (3,4), (3,6), (7,2)\} \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, con l'ordinamento indotto. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento su A. Determinare gli elementi massimali e minimali. Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.

Sol. (a) La relazione è riflessiva: per (m,n) vale $m = m$ e $n \leq n$; La relazione è antisimmetrica: se $(m,n) \leq (p,q)$ e $(p,q) \leq (m,n)$, allora necessariamente $m = p$. Inoltre $n \leq q$ e $q \leq n$ implicano $n = q$, da cui $(m,n) = (p,q)$. La relazione è transitiva: supponiamo che $(m,n) \leq (p,q)$ e $(p,q) \leq (x,y)$. Se $m < p$ oppure $p < x$, allora $m < p$ e $(m,n) \leq (x,y)$. Se $m = p = x$, allora $n \leq q$ e $q \leq y$. Ne segue che $n \leq y$ e $(m,n) \leq (x,y)$.

(b) Il diagramma di Hasse di questo insieme parzialmente ordinato è dato da



C'è un elemento minimale che è anche minimo assoluto: $(1,2)$; c'è un elemento massimale che è anche massimo assoluto: $(8,9)$.

15. Sia X un insieme e siano R_1 e R_2 due relazioni di equivalenza su X.
    (a) Dimostrare che $R_1 \cap R_2$ è una relazione di equivalenza.
    (b) Descrivere la partizione di X associata alla relazione $R_1 \cap R_2$ in termini di quelle associate a R_1 e R_2.
    (c) Esibire un esempio di R_1 e R_2 tali che $R_1 \cup R_2$ non è una relazione di equivalenza.

Sol. (a) Sia R la relazione $R_1 \cap R_2$. Per definizione, xRy se xR_1y e xR_2y. La relazione R è riflessiva: poiché per ipotesi xR_1x e xR_2x (le relazioni R_1 ed R_2 sono relazioni di equivalenza), vale anche xRx; La relazione R è simmetrica: poiché per ipotesi xR_1y e xR_2y implicano rispettivamente yR_1x e yR_2x vale anche yRx; La relazione R è transitiva: poiché per ipotesi

$$xR_1y \ \& \ yR_1z \ \Rightarrow \ xR_1z, \qquad xR_2y \ \& \ yR_2z \ \Rightarrow \ xR_2z,$$

si ha che $xRy \ \& \ yRz \ \Rightarrow \ xRz$.
(b) Siano $X = \cup_i A_i$ e $X = \cup_j B_j$ le partizioni di X associate rispettivamente alla relazione R_1 e alla relazione R_2. Definiamo $C_{ij} = A_i \cap B_j$, purché $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Verifichiamo che i sottoinsiemi C_{ij} determinano una partizione di X: chiaramente $C_{ij} \cap C_{kl} = \emptyset$, a meno che $i = k$ e $j = l$. Inoltre $X = \cup C_{ij}$, in quanto ogni elemento $x \in X$ appartiene precisamente ad un A_i e ad un B_j. Per quei particolari indici ij vale $x \in C_{ij} = A_i \cap B_j$. Infine $X = \cup C_{ij}$ è proprio la partizione della relazione

di equivalenza $R = R_1 \cap R_2$: infatti due elementi $x, y \in C_{ij} = A_i \cap B_j$ se e solo se sono equivalenti sia per R_1 che per R_2.
(c) Sia R_1 la relazione di congruenza modulo 2 e sia R_2 la relazione di congruenza modulo 3. Sappiamo che R_1 ed R_2 sono relazioni di equivalenza. Sia $R = R_1 \cup R_2$. Per definizione xRy se xR_1y oppure xR_2y. Facciamo vedere che R non è transitiva, dunque non è una relazione di equivalenza: infatti $2 \equiv 0 \mod 2$ e $0 \equiv 3 \mod 3$, ma 2 non è congruo a 3 né modulo 2 né modulo 3.