Elementi di Algebra e Logica 2008. Esercizi 1. Insiemi, funzioni, cardinalità, induzione, funzioni ricorsive.

1. Siano $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Determinare:
   (a) $A \cap B \cap C$; (c) $A \cup (B \cap C)$; (e) $A - (B - C)$;
   (b) $(A \cup B) \cap C$; (d) $(A - B) - C$; (f) $A \cap (B - C)$.

Sol. $A \cap B \cap C = \{4, 6\}$, $(A \cup B) \cap C = \{4, 5, 6, 8, 10\}$, $A \cup (B \cap C) = \{0, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$, $(A - B) - C = \{\emptyset\}$
$A - (B - C) = \{4, 6, 8, 10\}$, $A \cap (B - C) = \{0, 2\}$.

2. (a) Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $A_n = \{m \in \mathbf{N} : m \leq n\}$. Determinare $A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7$ e determinare $A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$.
   (b) Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $B_n = \{m \in \mathbf{Z} : \text{esiste un } k \in \mathbf{Z} \text{ tale che } m = kn\}$. Determinare $B_4 \cap B_5 \cap B_6$.

Sol. Dalla definizione segue che $A_4 \subset A_5 \subset A_6 \subset A_7$. Pertanto
$A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 = \{m \in \mathbf{N} : m \leq 4\} = A_4$.
$A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 = \{m \in \mathbf{N} : m \leq 7\} = A_7$.

3. Costruire tre insiemi A, B, C per cui $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$.

Sol. Prendiamo ad esempio i tre insiemi della retta reale

$$A = [0, 2], \quad B = [1, 2], \quad C = [3, 4].$$

Abbiamo $A \cap (B \cup C) = [1, 2]$ mentre $(A \cap B) \cup C = [1, 2] \cup [3, 4]$.

4. Siano A, B sottoinsiemi di un insieme X. È vero che $A^c \cup B^c = (A \cup B)^c$??? Dimostrarlo, o determinare insiemi A, B, X per cui non vale.

Sol. Prendiamo ad esempio i tre insiemi della retta reale $X = \mathbf{R}$

$$A = [0, 1], \quad B = [2, 3].$$

Abbiamo $A^c \cup B^c = X$ mentre $(A \cup B)^c =]-\infty, 0[\, \cup \,]1, 2[\, \cup \,]3, \infty[$.

5. Siano A, B e C tre sottoinsiemi di X. Dimostrare
   (a) $A \cup B \subset A \cup B \cup C$; (c) $(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$;
   (b) $(A - B) - C \subset A - C$; (d) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$.

Sol. Usare le definizioni....

6. Determinare le seguenti intersezioni infinite $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}}]-\infty, n]$, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [n, \infty[$.

Sol. Sia $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
Definiamo $A_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Per $n > m$ vale l'inclusione $A_n \subset A_m$. Dunque

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] = \lim_{n \to +\infty} A_n = \{0\}.$$

Definiamo $B_n =]-\infty, n]$. Per $n < m$ vale l'inclusione $B_n \subset B_m$. Dunque

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}}]-\infty, n] = B_1 =]-\infty, 1].$$

Definiamo $C_n = [n, \infty[$. Per $n > m$ vale l'inclusione $C_n \subset C_m$. Dunque

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [n, \infty[= \lim_{n \to +\infty} C_n = \{\emptyset\}.$$

7. Determinare le seguenti unioni infinite $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}]-\infty, n]$, $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} [n, \infty[$.

Sol. Sia $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
Definiamo $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Per $n > m$ vale l'inclusione $A_n \subset A_m$. Dunque

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = A_1 = (-1, 1).$$

Definiamo $B_n =]-\infty, n]$. Per $n < m$ vale l'inclusione $B_n \subset B_m$. Dunque

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}}]-\infty, n] = \lim_{n\to+\infty} B_n = \mathbf{R}.$$

Definiamo $C_n = [n, \infty[$. Per $n > m$ vale l'inclusione $C_n \subset C_m$. Dunque

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} [n, \infty[= C_1 = [1, \infty[.$$

8. (a) Determinare l'insiemi delle parti dei seguenti insiemi:

$$A = \{x, y, z\}, \qquad B = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}, \qquad C = \{a, \{a, b\}, \{f\}\}.$$

Sol. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, A\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{\{1, 2, 3\}\}, \{\{4, 5, 6\}\}, B\}$
$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a, b\}\}, \{\{f\}\}, \{a, \{a, b\}\}, \{a, \{f\}\}, \{\{a, b\}, \{f\}\}, C\}$.

9. (a) Determinare $\mathcal{P}(\emptyset)$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
(b) Determinare $\mathcal{P}(\{0\})$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\}))$.

Sol. (a) Se A è l'insieme vuoto, l'unico sottoinsieme di A è il sottoinsieme vuoto. Quindi l'insieme delle parti di A (che per definizione è l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di A) ha un solo elemento, ossia il sottoinsieme vuoto $\{\emptyset\}$. Ne segue che : $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\{\emptyset\}\}$;
se $A = \{a\}$ è un insieme costituito da un solo elemento, i possibili sottoinsiemi di A sono due: il sottoinsieme vuoto e il sottoinsieme $\{a\}$ formato dall'unico elemento di A, ossia $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$. Applicando questo ragionamento a $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\{\emptyset\}\}$ troviamo: $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
(b) Applicando il ragionamento precedente ad $A = \{0\}$ troviamo $\mathcal{P}(\{0\}) = \{\emptyset, \{0\}\}$;
Se $A = \{a, b\}$ è un insieme costituito da due elementi, i possibili sottoinsiemi di A sono quattro: il sottoinsieme vuoto, i sottoinsiemi $\{a\}$ e $\{b\}$, e il sottoinsieme formato da A stesso. Ne segue che $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \mathcal{P}(\{0\})\}$.

10. Sia $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, definita da $f(n) = 3n^2$. Determinare se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

Sol. f è iniettiva: $f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$;
infatti $3n^2 = 3m^2 \Leftrightarrow n^2 = m^2 \Leftrightarrow n = m$ (qui abbiamo usato che f è definita sugli interi *positivi*. Non avremmo potuto concludere lo stesso se f fosse stata definita su tutti gli interi, dove $n^2 = m^2 \Leftrightarrow n = \pm m$).
f non è suriettiva: ad esempio se $m = 5$ non esiste nessun numero $n \in \mathbf{N}$ tale che $f(n) = 3n^2 = 5$.
Ne segue che f non è biiettiva.

11. Sia $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{N}$, definita da $f(n) = 3n^2 + 4$. Determinare se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

Sol. f non è iniettiva: infatti $f(n) = 3n^2 + 4 = f(-n)$. Ad esempio $f(5) = f(-5) = 3 \cdot 25 + 4 = 79$.
f non è suriettiva: ad esempio se $m = 1$ non esiste nessun numero $n \in \mathbf{N}$ tale che $f(n) = 3n^2 + 4 = 1$.
Ne segue che f non è biiettiva.

12. Siano $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

(i) Determinare due funzioni iniettive distinte $f, g: A \to B$. Quante ce ne sono in tutto?
(ii) Determinare due funzioni suriettive distinte $f, g: B \to A$. Ne esistono di iniettive?
(iii) Determinare due funzioni biiettive distinte $f, g: B \to C$. Quante ce ne sono in tutto?

Sol. (i) Poiché $card(A) = 6 \leq card(B) = 7$ siamo sicuri che esistano funzioni iniettive da A a B. Due funzioni iniettive distinte (differiscono almeno su un elemento) sono ad esempio

$$f(0) = 0,\ f(2) = 1,\ f(4) = 2,\ f(6) = 3,\ f(8) = 4,\ f(10) = 5$$

$$g(0) = 1,\ g(2) = 2,\ g(4) = 3,\ g(6) = 4,\ g(8) = 5,\ g(10) = 6.$$

In generale, per $f(0)$ abbiamo 7 scelte, per $f(2)$ abbiamo 6 scelte, per $f(4)$ ne abbiamo 5, per $f(6)$ ne abbiamo 4, per $f(8)$ ne abbiamo 3, e per $f(10)$ ne abbiamo 2. In totale ci sono $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5040$ funzioni iniettive distinte $f: A \to B$.
(ii) Poiché $card(B) = 7 \geq card(C) = 7$ siamo sicuri che esistano funzioni suriettive da A a B. Due funzioni suriettive distinte (differiscono almeno su un elemento) sono ad esempio

$$f(0) = 4,\ f(1) = 5,\ f(2) = 6,\ f(3) = 7,\ f(4) = 8,\ f(5) = 9,\ f(6) = 10$$

$$g(0) = 10,\ g(1) = 9,\ g(2) = 8,\ g(3) = 7,\ g(4) = 6,\ g(5) = 5,\ g(6) = 4.$$

In questo caso particolare, dove i due insiemi finiti hanno la stessa cardinalità, ogni funzione suriettiva è anche iniettiva e dunque biiettiva. (iii) Come abbiamo appena osservato le funzioni f e g qui sopra sono due funzioni biiettive distinte. In generale, per $f(0)$ abbiamo 7 scelte, per $f(1)$ abbiamo 6 scelte, per $f(2)$ ne abbiamo 5, per $f(3)$ ne abbiamo 4, per $f(4)$ ne abbiamo 3, e per $f(5)$ ne abbiamo 2 e per $f(6)$ ne abbiamo 1. In totale, abbiamo $7! = 5040$ funzioni biiettive distinte $f: B \to C$.

13. Costruire una funzione $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$ tale che
    (a) f è una iniezione ma non una suriezione.
    (b) f è una suriezione ma non una iniezione.

Sol. (a) La funzione identità $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$, definita da $f(n) = n$ è chiaramente iniettiva ma non suriettiva.
N.B.: Una funzione iniettiva fra insiemi finiti della stessa cardinalità è necessariamente suriettiva e quindi biiettiva. L'esempio (a) dimostra che questo non vale fra insiemi infiniti, anche quando sono della stessa cardinalità.
(b) Sia $h: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, definita da $h(2k) = h(2k-1) = k$, al variare di $k \in \mathbf{N}$:

$$h(1) = h(2) = 1, \quad h(3) = h(4) = 2, \quad h(5) = h(6) = 3,\ \ldots$$

Dunque h è una funzione non iniettiva da $\mathbf{N}$ in sè.
Sia $g : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$, definita da $g(2n-1) = n-1$ e $f(2n) = -n$, al variare di $n \in \mathbf{N}$. Si verifica facilmente che g è una funzione biiettiva da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{Z}$. La funzione composta $F = g \circ h: \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ ha le caratteristiche richieste.

14. Se esiste, costruire una biiezione fra i seguenti insiemi.
    (a) $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{7, 8, 10\}$;
    (b) $A = \{0, 1\}$ e $B = \{1\}$;
    (c) $\mathbf{Z}$ e $\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ è dispari}\}$;
    (d) $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R} - \{0\}$;
    (e) $\mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$;
    (f) $A = \{a, b\}$ e $\mathcal{P}(A)$.

Sol. (a) $f: A \to B$ definita da $f(1) = 7,\ f(2) = 8,\ f(3) = 10$ è una biiezione.
(b) Non esiste una biiezione fra A e B perché sono insiemi finiti di cardinalità diversa.
(c) Osserviamo che $\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ è dispari}\} = \{\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \ldots\} = \{2n+1, \text{ al variare di } n \in \mathbf{Z}\}$.
La funzione $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita da $f(n) = 2n+1$ è la biiezione richiesta.
È iniettiva: $2n+1 = 2m+1 \quad \Leftrightarrow \quad n = m$;
È suriettiva: ogni intero dispari è della forma $2n+1$, per un opportuno $n \in \mathbf{Z}$.
(d) Osserviamo innanzitutto che la funzione cercata non può essere continua. Sia $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. La funzione $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R} - \{0\}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{R} \setminus \{\mathbf{N}\} \\ x+1, & x \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

è una biiezione. Con un ragionamento simile possiamo costruire una biiezione fra $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{R}$ privato di un numero finito di punti $\mathbf{R} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$.

(e) Identifichiamo $\mathbf{C}$ con $\mathbf{R}^2$ (mediante l'applicazione $z = x + iy \mapsto (x, y)$) e verifichiamo che $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{R}^2$ hanno la stessa cardinalità:
- osserviamo che se A e B sono insiemi disgiunti allora $\mathcal{P}(A \sqcup B) \leftrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ (la biiezione fra questi due insiemi è data da $X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$);
- osserviamo che $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\text{pari}} \sqcup \mathbf{N}_{\text{dispari}}$;
- osserviamo che $\mathbf{N}_{\text{pari}}$ e $\mathbf{N}_{\text{dispari}}$ sono entrambi numerabili e dunque $\mathcal{P}(\mathbf{N}) = \mathcal{P}(\mathbf{N}_{\text{pari}} \sqcup \mathbf{N}_{\text{dispari}})$ ha la stessa cardinalità di $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \times \mathcal{P}(\mathbf{N})$.
- poiché $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ ha la stessa cardinalità di $\mathbf{R}$ (vedi *http://it.wikipedia.org/wiki/Cardinalita'_del_continuo*) ne segue che $\mathbf{R}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbf{R}^2$.
- siano $\phi\colon \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to \mathbf{R}$, $\Psi\colon \mathcal{P}(\mathbf{N}) \times \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ e $\Phi\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathcal{P}(\mathbf{N}) \times \mathcal{P}(\mathbf{N})$ le biiezioni corrispondenti. Allora $\phi \circ \Psi \circ \Phi\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è la biiezione cercata.

(f) Non esiste una biiezione fra A e $\mathcal{P}(A)$ perché sono insiemi finiti di cardinalità diversa: $card(A) = 2$ e $card(\mathcal{P}(A)) = 2^2 = 4$. Si può dimostrare che anche per un insieme infinito A la cardinalità di $\mathcal{P}(A)$ è sempre maggiore di quella di A.

15. Costruire due insiemi finiti A, B per cui $\mathrm{card(A \cup B)} \neq \mathrm{card(A)} + \mathrm{card(B)}$ e due insiemi finiti C, D per cui $\mathrm{card(C \cup D)} = \mathrm{card(C)} + \mathrm{card(D)}$.

Sol. In generale per due insiemi finiti X e Y vale $card(X \cup Y) = card(X) + card(Y) - card(X \cap Y)$. Quindi se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 7, 8, 9\}$ abbiamo che $\mathrm{card(A \cup B)} = 7 \neq \mathrm{card(A)} + \mathrm{card(B)} = 4 + 5 = 9$; mentre per $C = \{1, 2, 3, 4\}$ e $D = \{7, 8, 9, 10, 30, 40\}$ abbiamo che $\mathrm{card(C \cup D)} = \mathrm{card(C)} + \mathrm{card(D)}$.

16. Dimostrare i seguenti fatti:
    (a) Sia $A \subset B$ un sottoinsieme di un insieme numerabile. Allora A è finito oppure è numerabile.
    (b) Siano A, B due insiemi numerabili. Allora gli insiemi $A \cup B$ e $A \times B$ sono numerabili.
    (c) Per $k = 1, 2, 3, \dots$, siano A_k insiemi numerabili. Allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ è numerabile.

Sol. (a) In generale, dati due sottoisiemi $A \subset B$, si ha che $card(A) \leq card(B)$: infatti l'inclusione

$$A \hookrightarrow B, \; a \mapsto a$$

è un'applicazione iniettiva da A in B. Se B è numerabile, segue che A è necessariamente finito o numerabile.

(b) Siano $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ due insiemi numerabili.
L'unione disgiunta $A \sqcup B$ di A e B è numerabile. Infatti l'applicazione $\mathbf{N} \to A \sqcup B$ definita da

$$1 \mapsto a_1, \quad 2 \mapsto b_1, \quad 3 \mapsto a_2, \quad 4 \mapsto b_2, \quad 5 \mapsto a_3, \quad 6 \mapsto b_3, \quad n \mapsto \begin{cases} a_{(n+1)/2}, & n \text{ dispari} \\ b_{n/2}, & n \text{ pari} \end{cases}$$

definisce una biiezione. Per quanto detto al punto (a) ne segue che $A \cup B$ è numerabile.
Il prodotto cartesiano

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A, \; b_j \in B\}$$

è numerabile. Se disponiamo gli elementi di $A \times B$ in una matrice infinita

$$\begin{matrix} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & (a_1, b_3) & \dots \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \dots & \\ (a_3, b_1) & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

l'applicazione

$$1 \mapsto (a_1, b_1), \quad 2 \mapsto (a_1, b_2), \quad 3 \mapsto (a_2, b_1), \quad 4 \mapsto (a_3, b_1), \quad 5 \mapsto (a_2, b_2), \quad 6 \mapsto (a_1, b_3), \quad \dots$$

definisce una biiezione tra N e $A \times B$. Dunque $A \times B$ è numerabile.

(c) Al variare di $k \in \mathbf{N}$, sia $A_k = \{a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \ldots\}$ un insieme numerabile. Disponiamo gli elementi dell'unione disgiunta $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k \sqcup \ldots$ nel seguente modo

$$\begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots \\ a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots \\ \;\vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

L'applicazione $\mathbf{N} \to A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k \sqcup \ldots$ definita (in modo simile a quella del punto (b)) da

$$1 \mapsto a_{11}, \quad 2 \mapsto a_{12}, \quad 3 \mapsto a_{21}, \quad 4 \mapsto a_{31}, \ldots$$

è biiettiva. Dunque l'unione disgiunta $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k \sqcup \ldots$ è numerabile ed in particolare l'unione $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ è numerabile.

17. Sia $a > -1$. Dimostrare per induzione che $(1+a)^n \geq 1 + na$, per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Sol. per $n = 1$ vale $(1+a) \geq 1 + a$
ipotesi induttiva: $(1+a)^n \geq 1 + na$
tesi: $(1+a)^n \geq 1 + na$ implica $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$:
$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a)$. Poiché per l'ipotesi induttiva $(1+a)^n \geq 1 + na$, segue che $(1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = (1+a+na+na^2) = (1+(n+1)a+na^2)$. Quest'ultima espressione è chiaramente maggiore di $(1+(n+1)a)$. Conclusione: $(1+a)^{n+1} \geq (1+(n+1)a)$, come richiesto.

18. Dimostrare per induzione che $n^3 - n$ è multiplo di 3, per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Sol. Per $n = 1$ vale $0 = 0 \cdot 3$;
per $n = 2$ vale $8 - 2 = 6 = 2 \cdot 3$
ipotesi induttiva: $n^3 - n$ è multiplo di 3;
tesi: "$n^3 - n$ è multiplo di 3" implica "$(n+1)^3 - (n+1)$ è multiplo di 3": abbiamo $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 1 + 3n + 3n^2 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n + 3n^2$. A questo punto è chiaro che se $(n^3 - n)$ è multiplo di 3 lo è anche $(n+1)^3 - (n+1)$.

19. Dimostrare per induzione che $n^3 + 3n^2 + 2n$ è multiplo di 6, per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Sol. Per $n = 1$ vale $1 + 3 + 2 = 6$;
ipotesi induttiva: $n^3 + 3n^2 + 2n$ è multiplo di 6;
tesi: "$n^3 + 3n^2 + 2n$ è multiplo di 6" implica "$(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1)$ è multiplo di 6": abbiamo $(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1) = n^3 + 1 + 3n + 3n^2 + 3(n^2 + 1 + 2n) + 2n + 2 = (n^3 + 3n^2 + 2n) + (6 + 3n(n+3))$. Osserviamo che $6 + 3n(n+3)$ è sempre divisibile per 6: il primo addendo è uguale a 6, il secondo è multiplo di tre ed è pari). A questo punto è chiaro che se $n^3 + 3n^2 + 2n$ è multiplo di 6 a anche $(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1)$ è multiplo di 6.

20. (i) Dimostrare per induzione che $3^n < n!$ per ogni $n \geq 7$.
(ii) Trovare $n_0 \in \mathbf{N}$ tale che $4^{n_0} < n_0!$. Dimostrare per induzione che $4^n < n!$ per ogni $n \geq n_0$.

Sol. (i) Per $n = 7$ vale $3^7 = 2187 < 7! = 5040$;
ipotesi induttiva: $3^n < n!$
tesi: $3^n < n!$ implica $3^{n+1} < (n+1)!$:
abbiamo $3^{n+1} = 3^n \cdot 3$. Per ipotesi induttiva $3^n < n!$, quindi vale la maggiorazione $3^n \cdot 3 < n! \cdot 3$. Poiché per ogni $n \geq 7$ vale $3 < n + 1$, otteniamo la maggiorazione cercata

$$3^{n+1} < n! \cdot 3 < n! \cdot (n+1) = (n+1)!.$$

(ii) Con un po' di calcoli...si trova che il primo numero naturale $n_0 \in \mathbf{N}$ per cui vale $4^{n_0} < n_0!$ è $n_0 = 9$:

$$4^9 = 262144 < 9! = 362880.$$

La dimostrazione del fatto che $4^n < n!$, per ogni $n \geq n_0$, ricalca esattamente quella del punto precedente.

21. Per quali numeri naturali n si ha che $n! \geq n^2$? Dimostrare per induzione la risposta data.

Sol. Il primo numero naturale per cui $n! \geq n^2$ è $n_0 = 4$. Facciamo vedere che tale disuguaglianza vale per ogni $n \geq 4$.
Per $n = 4$ si ha che $4! = 24 > 4^2 = 16$;
ipotesi induttiva: $n! \geq n^2$;
tesi: $n! \geq n^2$ implica $(n+1)! > (n+1)^2$:
abbiamo $(n+1)! = n!(n+1)$. Poiché per l'ipotesi induttiva $n! \geq n^2$, otteniamo la maggiorazione $n!(n+1) > n^2(n+1)$. Se riusciamo a dimostrare che

$$n^2(n+1) > (n+1)^2 \qquad (*)$$

abbiamo finito. Osserviamo che la disuguaglianza (*) è equivalente alla disuguaglianza $n(n^2-2) > 1$. Si vede facilmente che quest'ultima è verificata per ogni $n \geq 4$.

22. Dimostrare per induzione che $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ per ogni intero $n \geq 1$.

Sol. Per $n = 1$ vale $1^2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/6 = 1$;
ipotesi induttiva: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
tesi: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ implica $1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$:
scriviamo $1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2$. Per l'ipotesi induttiva

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

come richiesto.

23. Dimostrare per induzione che la somma dei cubi dei primi n numeri pari è uguale a $2n^2(n+1)^2$.

Sol. Per $n = 2$ vale $2^3 = 8 = 2 \cdot 1^2(2)^2 = 8$;
ipotesi induttiva: la somma dei cubi dei primi n numeri pari è uguale a $2n^2(n+1)^2$; in formule

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^3 = 2n^2(n+1)^2;$$

tesi: $\sum_{k=1}^{n} (2k)^3 = 2n^2(n+1)^2$ implica $\sum_{k=1}^{n+1} (2k)^3 = 2(n+1)^2(n+2)^2$:
scriviamo $\sum_{k=1}^{n+1} (2k)^3 = \sum_{k=1}^{n} (2k)^3 + (2(n+1))^3$. Poiché per ipotesi induttiva $\sum_{k=1}^{n} (2k)^3 = 2n^2(n+1)^2$, abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k)^3 = 2n^2(n+1)^2 + (2(n+1))^3 = 2(n+1)^2[n^2 + 4n + 4] = 2(n+1)^2(n+2)^2,$$

come richiesto.

24. (a) Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, risulta $\sum_{i=0}^{n} (4i+1) = (2n+1)(n+1)$.
(b) Determinare $\sum_{i=0}^{n} (4i+2)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Sol. (a) Per $n = 1$ vale $1 + 4 + 1 = 6 = 3 \cdot 2 = 6$;
ipotesi induttiva: $\sum_{i=0}^{n}(4i + 1) = (2n + 1)(n + 1)$;
tesi: $\sum_{i=0}^{n}(4i + 1) = (2n + 1)(n + 1)$ implica $\sum_{i=0}^{n+1}(4i + 1) = (2n + 3)(n + 2)$:
scriviamo $\sum_{i=0}^{n+1}(4i + 1) = \sum_{i=0}^{n}(4i + 1) + (4(n + 1) + 1)$. Per l'ipotesi induttiva abbiamo

$$\sum_{i=0}^{n}(4i + 1) + (4(n + 1) + 1) = (2n + 1)(n + 1) + (4(n + 1) + 1) = (2n + 3)(n + 2),$$

come richiesto.
(b) $\sum_{i=0}^{n}(4i + 2) = \sum_{i=0}^{n}(4i + 1) + n = (2n + 1)(n + 1) + n$.

25. Sia $F\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ la funzione ricorsiva definita da $F(0) = 1$, $F(n) = F(n - 1) + 2$, per $n \geq 1$. Calcolare $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$. Chi sono i numeri $F(n)$?

Sol. $F(1) = F(0) + 2 = 3$, $F(2) = F(1) + 2 = 3 + 2 = 5$, $F(3) = F(2) + 2 = 5 + 2 = 7$, $F(4) = F(3) + 2 = 7 + 2 = 9$. I numeri $F(n)$ sono gli interi positivi dispari: si parte da 1, aggiungendo due si ottiene il numero dispari successivo 3 e così via...

26. Sia $F\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ la funzione ricorsiva definita da $F(1) = 1$, $F(n) = n + F(n - 1)$, per $n \geq 1$. Calcolare $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$. Dimostrare per induzione che $F(n) = n(n + 1)/2$.

Sol. (a) $F(1) = 1$, $F(2) = F(1)+2 = 1+2 = 3$, $F(3) = F(2)+3 = 3+3 = 6$, $F(4) = F(3)+4 = 6+4 = 10$.
(b) $F(1) = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$
ipotesi induttiva: $F(n) = n(n + 1)/2$
tesi: $F(n) = n(n + 1)/2$ implica $F(n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2$:
per definizione $F(n+1) = (n+1) + F(n)$; per ipotesi induttiva $F(n) = n(n+1)/2$. Sostituendo quest'ultima espressione nella precedente troviamo

$$F(n + 1) = (n + 1) + n(n + 1)/2 = \frac{2n + 2 + n^2 + n}{2} = (n + 1)(n + 2)/2,$$

come richiesto.

27. Siano $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, ed $F_k = F_{k-2} + F_{k-1}$, per $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, i numeri di Fibonacci.
   (i) Dimostrare che $F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$.
   (ii) Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, risulta che $\mathrm{mcd}(F_n, F_{n+1}) = 1$.
   (iii) Dimostrare che $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$ per ogni $n \geq 1$.

Sol. (i) Per $n = 1$ vale $1^2 = 1 \cdot 1$;
ipotesi induttiva: $F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$;
tesi: $F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ implica $F_1^2 + \ldots + F_{n+1}^2 = F_{n+1} F_{n+2}$:
scriviamo $F_1^2 + \ldots + F_{n+1}^2 = F_1^2 + \ldots + F_n^2 + F_{n+1}^2$. Per l'ipotesi induttiva abbiamo

$$F_1^2 + \ldots + F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} F_{n+2},$$

come richiesto.
(ii) Per $n = 1$ vale $mcd(F_1, F_2) = 1$;
ipotesi induttiva: $mcd(F_n, F_{n+1}) = 1$;
tesi: $mcd(F_n, F_{n+1}) = 1$ implica $mcd(F_{n+1}, F_{n+2}) = 1$:
per definizione $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Per le proprietà del *mcd* e per l'ipotesi induttiva abbiamo

$$mcd(F_{n+1}, F_{n+2}) = mcd(F_{n+1}, F_{n+1} + F_n) = mcd(F_{n+1}, F_n) = 1,$$

come richiesto.
(iii) Per $n = 1$ vale $F_1 = F_2 = 1$;

ipotesi induttiva: $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$;
tesi: $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$ implica $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n+1} = F_{2(n+1)}$: scriviamo $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n+1} = F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} + F_{2n+1}$. Per l'ipotesi induttiva abbiamo

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} + F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2(n+1)},$$

come richiesto

28. Sia $g\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ la funzione ricorsiva definita da $g(0) = 2$, $g(1) = 5$ e $g(n) = g(n-2) - g(n-1)$, per $n \geq 2$. Calcolare $g(5)$.

Sol. $g(2) = g(0) - g(1) = 2 - 5 = -3$
$g(3) = g(1) - g(2) = 5 - (-3) = 8$
$g(4) = g(2) - g(3) = -3 - 8 = -11$
$g(5) = g(3) - g(4) = 8 - (-11) = 19.$