RELAZIONI D'ORDINE

1

Definizione 1.1. Sia X un insieme. Una relazione su X è detta una *relazione d'ordine* o un *ordinamento di X* se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Un insieme X, munito di una relazione d'ordine, si dice un insieme *parzialmente* ordinato[1].

Si noti che un ordinamento su X induce automaticamente un ordinamento su un qualsiasi sottoinsieme di X.

Un insieme parzialmente ordinato *finito* può essere rappresentato graficamente mediante un *diagramma di Hasse* che si disegna nel modo seguente. Se $a\,R\,b$ e $a \neq b$, si pone b al di sopra di a. Inoltre si collega a a b tramite un segmento orientato, omettendo i segmenti orientati che sono conseguenza della riflessività (in pratica, si omettono i circoletti intorno ai vari elementi), e anche quelli che sono conseguenza della transitività (se $a\,R\,b$ e $b\,R\,c$, allora anche $a\,R\,c$ ma non si disegna il corrispondente segmento orientato, visto che non aggiungerebbe nulla a quanto già sappiamo).

Definizione 1.2. *(Relazioni d'ordine totale)* Un ordinamento R su un insieme X di dice *totale* se vale la seguente proprietà: per ogni $x, y \in X$, si ha che x e y sono *paragonabili*, cioè $x\,R\,y$ o $y\,R\,x$.

Il diagramma di Hasse di un insieme totalmente ordinato finito è "banale": non è altro che un insieme di punti uno sopra l'altro, dove un punto è collegato a quello che gli sta sopra da un segmento verticale orientato verso l'alto (provate, ad esempio, a disegnare il diagramma di Hasse dei numeri naturali da 1 a 5, ordinati tramite l'usuale relazione di minore o uguale. Quindi i diagrammi di Hasse interessanti sono quelli di insiemi ordinati parzialmente ma non totalmente, ossia in cui esistono coppie di elementi non paragonabili.

Esempi 1.3. Ecco alcuni esempi notevoli di relazioni d'ordine:

(a) *(Usuale minore o uguale)*. L'usuale relazione di "minore o uguale", in altre parole $x\,R\,y$ se $x \leq y$ è un ordinamento del campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, e di ogni suo sottoinsieme (ad esempio, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$). È un ordinamento *totale*, perchè due numeri reali sono sempre paragonabili.

(b) *(Inclusione)* Dato un insieme Z, la relazione di inclusione: $A\,R\,B$ se $A \subseteq B$ è un ordinamento su $\mathcal{P}(Z)$, insieme delle parti di Z. Eccetto il caso in cui $|Z| \leq 1$, non è un ordinamento totale. Ad esempio, se $z, t \in Z$, i sottoinsiemi $\{z\}$ e $\{t\}$, non sono paragonabili.

(c) *(Divisibilità)* La relazione su $\mathbb{N}$ definita da $a\,R\,b$ se b è multiplo intero di a (cosa che si suole denotare spesso con $a|b$, cioè *"a divide b"*) è una relazione d'ordine (facile esercizio). Non è totale (ad esempio, 2 e 3 non sono paragonabili).
Spesso si considerano particolari sottoinsiemi, ordinati tramite la divisibilità: gli insiemi dei divisori di un fissato numero naturale n. In simboli:

$$\mathbf{D}_n = \{a \in \mathbb{N} \mid a|n\}$$

[1] Le relazioni d'ordine riappariranno nel nostro corso verso la fine, quando tratteremo i *reticoli*.

Ad esempio, $\mathbf{D}_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, , 9, 12, 18, 36\}$. Il suo diagramma di Hasse è

$$\begin{tikzcd}
 & 36 & \\
12 \arrow[ur] & & 18 \arrow[ul] \\
4 \arrow[u] & 6 \arrow[ul] \arrow[ur] & 9 \arrow[u] \\
2 \arrow[u] \arrow[ur] & & 3 \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(d) Consideriamo il prodotto cartesiano dell'insieme $\{0, 1\}$ n volte:

$$X = \{0, 1\}^n = \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\} \qquad (n \text{ volte})$$

La relazione R su X definita da: $(a_1, \dots, a_n)\, R\, (b_1, \dots, b_n)$ se $a_i \leq b_i$ per ogni $i = 1, ..., n$ è d'ordine (esercizio). Esempio: $(0, 1, 0, 1, 0)\, R\, (1, 1, 1, 1, 0)$. Non è un ordinamento totale (a meno che $n = 1$). Ad esempio $(1, 0)$ e $(0, 1)$ non sono paragonabili.

Esempio 1.4. *(Ordinamenti sul prodotto cartesiano)* Siano (X, R) e (Y, S) due insiemi (parzialmente) ordinati. Allora si può ordinare il prodotto cartesiano $X \times Y$ in almeno due modi diversi:

(a) *Ordinamenti lessicografici.* L'*ordinamento lessicografico* consiste nella relazione d'ordine T su $X \times Y$ definita come segue: dati (a, b), $(c, d) \in X \times Y$, $(a, b)\, T\, (c, d)$ se $a \neq c$ e $a\, R\, c$ oppure se $a = c$ e $b\, S\, d$.
Si ha che se R e S sono ordinamenti *totali*, allora anche T è un ordinamento *totale* totale. Infatti, siano (a, b) e (c, d) due elementi diversi del prodotto cartesiano $X \times Y$. Se $a = c$ allora necessariamente $b \neq d$. Poichè S è un ordinamento totale, $b\, S\, d$ e quindi, per definizione $(a, b)\, T\, (c, d)$. Se $a \neq c$, allora, poichè R è un ordinamento totale, $a\, R\, c$ e quindi, per definizione, $(a, b)\, T\, (c, d)$.
Ovviamente, si può estendere questa definizione al prodotto cartesiano di un numero finito di insiemi ordinati $(X_1, R_1), \dots, (X_n, R_n)$.
Ad esempio l'ordinamento lessicografico su $\mathbb{R}^n$ (dove $\mathbb{R}$ è ordinato con l'usuale $\leq$) è:

$(x_1, \dots, x_n)\, T\, (y_1, \dots, y_n)$ se $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$ oppure, detto $\bar{i}$ il minimo $i = 1, ..., n$ tale che $x_1 \neq y_i$, si ha che $x_{\bar{i}} < y_{\bar{i}}$.

Si può analogamente definire l'ordinamento *lessicografico inverso* su $X \times Y$: esso consiste nella relazione d'ordine T' su $X \times Y$ definita come segue: dati $(a, b)\, (c, d) \in X \times Y$, $(a, b), T'\, (c, d)$ se $b \neq d$ e $b\, S\, d$ oppure se $b = d$ e $a\, R\, c$.

(b) *Ordinamento prodotto.* Esso consiste nella relazione d'ordine P su $X \times Y$ definita come segue: dati (a, b), $(c, d) \in X \times Y$, $(a, b)\, P\, (c, d)$ se $a\, R\, c$ e $b\, S\, d$. Al contrario della definizione precedente, in generale P non è un ordinamento totale nemmeno se R e S sono ordinamenti totali. Ad esempio, in $\mathbb{R}^2$ ordinato tramite la relazione prodotto(in altre parole, $(x, y)\, P\, (z, t)$ se $x \leq z$ e $y \leq z$), gli elementi $(0, 1)$ e $(1, 0)$ non sono paragonabili. Si noti che l'Esempio 1.3(d) è una relazione prodotto.

Esercizio 1.5. Per ognuno dei seguenti insiemi ordinati, scrivere esplicitamente tutti i suoi elementi, e disegnare il suo diagramma di Hasse:

(a) $\mathbf{D}_8$, $\mathbf{D}_{10}$, $\mathbf{D}_{12}$, $\mathbf{D}_{15}$, $\mathbf{D}_{24}$, ordinati tramite la divisibilità.
(b) $\mathcal{P}(\{a,b\})$, $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$, ordinati tramite l'inclusione.
(c) $\{1,2,3\} \times \mathbf{D}_6$ con l'ordinamento prodotto (dove $\{1,2,3\}$ è ordinato tramite l'usuale minore o uguale e $\mathbf{D}_6$ è ordinato tramite la divisibilità).
(d) $\{1,2,3\} \times \mathbf{D}_6$ con l'ordinamento lessicografico (dove $\{1,2,3\}$ è ordinato tramite l'usuale minore o uguale e $\mathbf{D}_6$ è ordinato tramite la divisibilità).
(e) $\mathbf{D}_6 \times \{1,2,3\}$ con l'ordinamento lessicografico (dove $\mathbf{D}_6$ è ordinato tramite la divisibilità e $\{1,2,3\}$ è ordinato tramite l'usuale minore o uguale).
(f) $\mathcal{P}(\{a,b\}) \times \mathcal{P}(\{x\})$, ordinato: (i) tramite l'ordinamento prodotto; (ii) l'ordinamento lessicografico; (iii) l'ordinamento lessicografico inverso (dove i due insiemi delle parti sono ordinati dall'inclusione).

2

Cosí come nell'usuale relazione di minore o uguale, si possono definire i concetti di massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore etc.. È però importante osservare che, se l'ordinamento non è totale, queste nozioni possono avere risvolti diversi, e più complessi.

Definizione 2.1 (Minimo e massimo)**.** Sia X un insieme munito di una relazione d'ordine R. Un elemento $x \in X$ si dice un *minimo* di X (e si denota $x = \min X$) se $x\,R\,y$, per ogni $y \in Y$. Analogamente un elemento $x \in X$ si dice un *massimo* di X (e si denota $x = \max X$) se $y\,R\,x$ per ogni $y \in X$.

Osservazione 2.2 (Unicità)**.** (a) Un minimo, se esiste, è unico. Infatti, se x e x' sono entrambi minimi di X, allora $x'\,R\,x$ e $x\,R\,x'$. Dunque, per l'antisimmetria, $x = x'$. Dunque possiamo parlare de *il* minimo di X. Stessa cosa per il massimo.

Esempio 2.3. (a) Sia Z un insieme (non necessariamente finito), e sia $X = \mathcal{P}(Z)$, ordinato mediante l'inclusione. Allora $\min \mathcal{P}(Z) = \emptyset$ e $\max \mathcal{P}(Z) = Z$.
(b) Consideriamo, per un $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $\mathbf{D}_n$, ordinato mediante la divisibilità. Si ha che $\min \mathbf{D}_n = 1$ e $\max \mathbf{D}_n = n$,
(c) Consideriamo l'insieme $X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, ordinato mediante la divisibilità. Si ha che X non ha né minimo né massimo.

Definizione 2.4 (Elementi massimali e minimali)**.** Sia X un insieme, munito di una relazione d'ordine R. Un elemento $x \in X$ si dice un *elemento minimale di* X se vale la seguente proprietà: *dato* $y \in X$*, se* $y\,R\,x$ *allora* $y = x$.
Analogamente, un elemento $x \in X$ si dice un *elemento massimale di* X se vale la seguente proprietà: *dato* $y \in X$*, se* $x\,R\,y$ *allora* $y = x$.

Osservazione 2.5. Il minimo, se esiste, è l'unico elemento minimale. Infatti, supponiamo che $x = \min X$, e sia $z \in X$ un elemento minimale. Allora, per definizione di minimo, $x\,R\,z$. Dunque, per definizione di elemento minimale $x = z$.
Analogamemente: il massimo, se esiste, è l'unico elemento massimale.

Esempio 2.6. (a) Consideriamo l'insieme $X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, ordinato mediante la divisibilità. Si ha che 2, 3, 5 e 7 sono elementi minimali, mentre 6, 7, 8, 9 e 10 sono elementi massimali.
(b) Sia $Z = \{1,2,3\}$ e sia $X = \{A \in \mathcal{P}(Z) \mid |A| \text{ è pari}\}$. Allora $\emptyset = \min X$, e dunque è l'unico elemento minimale di X, mentre $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ sono elementi massimali di X.

Definizione 2.7. *(Minoranti e maggioranti)* Sia X un insieme, munito di una relazione d'ordine R, e sia $A \subseteq X$. Un elemento $x \in X$ si dice un *minorante* di A se $x\,R\,a$, per ogni $a \in A$. L'insieme

dei minoranti di A si indica con $Minor\, A$.
Analogamente, un elemento $x \in X$ si dice un *maggiorante* di A se $a\, R\, x$, per ogni $a \in A$. L'insieme dei maggioranti di A si indica con $Maggior\, A$.

Esempio 2.8. Sia $X = \mathcal{P}(\{x, y, z, t\})$, ordinato mediante l'inclusione, e sia $A = \{\{x, y\}, \{y, t\}\}$. Allora $Minor\, A = \{\emptyset, \{y\}\}$ e $Maggior\, A = \{\{x, y, t\}, \{x, y, z, t\}\}$.

Esempio 2.9. Consideriamo $\mathbf{D}_{12}$ e $\mathbf{D}_{10}$, ordinati mediante la divisibilità, e sia $X = \mathbf{D}_6 \times \mathbf{D}_{10}$, munito dell'ordinamento prodotto. Sia $A = \{(2, 2), (6, 1)\}$. Allora $Maggior\, A = \{(6, 2), (6, 10)\}$ e $Minor\, A = \{(1, 1), (2, 1)\}$.

Definizione 2.10. *(Inf e sup)* Sia X un insieme, munito di una relazione d'ordine R, e sia $A \subseteq X$. Un elemento $x \in X$ si dice *estremo inferiore* di A, e si indica $x = \inf A$, se x è il massimo dell'insieme dei minoranti di A. In altre parole, $x = \inf A$ se:
(a) $x\, R\, a$, per ogni $a \in A$ e,
(b) per ogni $y \in X$ tale che $y\, R\, a$ per ogni $a \in A$, si ha che $y\, R\, x$.
Analogamente, un elemento $x \in X$ si dice *estremo superiore* di A, e si indica $x = \sup A$, se x è il minimo dell'insieme dei maggioranti di A. In altre parole, $x = \sup A$ se:
(a) $a\, R\, x$, per ogni $a \in A$ e,
(b) per ogni $y \in X$ tale che $a\, R\, y$ per ogni $a \in A$, si ha che $x\, R\, y$.

Esercizio 2.11. Se A è un sottoinsieme di X che contiene un solo elemento, per esempio $A = \{a\}$, dimostrare che $\inf A = \sup A = a$.

Notazione 2.12. Se A è un sottoinsieme che contiene due elementi, per esempio $A = \{a, b\}$, allora si denota $\sup A = \sup(a, b)$ e $\inf A = \inf(a, b)$

Definizione 2.13. *(Reticolo)* Un insieme ordinato X è detto un *reticolo* se $\inf(x, y)$ e $\sup(x, y)$ esistono per ogni $x, y \in X$.

Esempio 2.14. Sia $X = \{C \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) \mid |C| \text{ è pari } \}$, ordinato mediante l'inclusione. Sia $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 5\}\}$. Allora $Minor\, A = \{\emptyset\}$. Dunque $\inf A = \emptyset$. Inoltre $Maggior\, A = \{\{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Dunque $\inf A = \{1, 2, 3, 5\}$.
Invece $\inf(\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 6\})$ non esiste: l'insieme dei minoranti è $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, che non ha massimo.
Altro esempio: $\sup(\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 6\}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Infatti l'insieme dei maggioranti è $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.

Esempio/Esercizio 2.15. Ogni insieme delle parti, $X = \mathcal{P}(Z)$, ordinato mediante l'inclusione, è un reticolo. Infatti, dimostrare che dati $A, B \subseteq Z$, $\inf(A, B) = A \cap B$, e $\sup(A, B) = A \cup B$.

Esempio/Esercizio 2.16. Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora $\mathbf{D}_n$, ordinato mediante la divisibilità, è un reticolo. Infatti, dimostrare che $a, b \in \mathbf{D}_n$, $\inf(a, b) = mcd\,(a, b)$ (massimo comune divisore), e $\sup(a, b) = mcm\,(a, b)$ (minimo comune multiplo).

Esercizio 2.17. Si considerino $\mathbf{D}_6$ e $\mathbf{D}_{10}$, ordinati secondo la divisibilità. Sia $X = \mathbf{D}_6 \times \mathbf{D}_{10}$, ordinati secondo l'ordinamento *lessicografico*. Determinare, se esistono $\inf((2, 2), (2, 5))$ e $\sup((2, 2), (2, 5))$. Determinare inoltre $\inf((3, 1), (2, 5))$ e $\sup((3, 1), (2, 5))$.
È vero che X è un reticolo?

Esercizio 2.18. Sia X un reticolo, e siano $a, y, z \in X$. Dimostrare che

$$\inf(\inf(x, y), z) = \inf(x, \inf(y, z)) = \inf(\inf(x, z), y) = \inf\{x, y, z\}$$

e che

$$\sup(\sup(x, y), z) = \sup(x, \inf(y, z)) = \sup(\sup(x, z), y) = \sup\{x, y, z\}$$

Esercizio 2.19. Sia X un reticolo *finito*. Dimostrare che ogni sottoinsieme $A \subset X$ ha estremo inferiore e superiore. (Suggerimento: se $|A| = 1$ $\inf A$ e $\sup A$ esistono sempre. Se $|A| = 2$, $\inf A$ e $\sup A$ esistono sempre per ipotesi. Il caso $|A| = 3$ è quello dell'esercizio precedente. Generalizzare induttivamente.)

3. Raccolta di alcuni esercizi tratti da compiti d'esame.

Attenzione: questi sono alcuni esercizi d'esame, sugli argomenti di questa dispensa. Non sono una selezione di quelli che ritengo più significativi, ma solamente quelli tratti daglia appelli di cui sono in possesso del file sorgente. Siete quindi invitati a cercare di risolvere gli esercizi, su questi argomenti, tratti dai TUTTI gli esami degli anni passati (oltre agli esercizi assegati, naturalmente).

Esercizio 3.1. Sia $A = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$. Si consideri la relazione R su A definita come segue: $(a, b)\, R\, (c, d)$ se e solo se $a \leq c$ e b divide d.

(a) Dimostrare che R è una relazione d'ordine parziale.

(b) Determinare gli elementi massimali e minimali di A. Stabilire se esistono il massimo assoluto e il minimo assoluto.

(c) Stabilire se A, munito della relazione d'ordine R, è un reticolo.

Soluzione. (a) Riflessività: per ogni $(a, b) \in A$, si ha che $a \leq a$ e b divide b, e dunque $(a, b)\, R\, (a, b)$.
Antismmetria: supponiamo $a \leq c$ e b divide d, e che $c \leq a$ e d divide b. Allora $a = c$ e $b = d$. Abbiamo quindi dimostrato che se $(a, b)\, R\, (c, d)$ e $(c, d)\, R\, (a, b)$, allora $(a, b) = (c, d)$.
Transitività: se $a \leq c$ e b divide d, e $c \leq e$ e d divide f, allora $a \leq e$ e b divide f. Abbiamo quindi dimostrato che se $(a, b)\, R(c, d)$ e $(c, d)\, R(e, f)$ allora $(a, b)\, R\, (e, f)$.
(b) Si vede, ad esempio disegnando il diagramma di Hasse, oppure ragionando direttamente, che $(1, 1)$ è l'unico elemento minimale di A, mentre $(3, 2)$ e $(3, 3)$ sono gli elemnti massimali. Quindi il minimo assoluto esiste, ed è $(1, 1)$, mentre il massimo assoluto non esiste.
(c) La risposta è no, perchè, ad esempio, $sup\{(3, 2), (3, 3)\}$ non esiste.

Esercizio 3.2. Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e sia $P = \{B \subset A : \#B \text{ è dispari}\}$. Sia R su P la relazione data da "B è in relazione con C quando $B \subset C$".

(a) Dimostrare che si tratta di un ordinamento parziale.

(b) Determinare, se esistono, elementi massimali e minimali.

(c) Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti.

(d) Determinare, se esiste, $\sup(\{1\}, \{2\})$. (a) Ogni sottoinsieme B di A è contenuto in se stesso;

se abbiamo che $B \subset C$ e anche $C \subset B$, allora $B = C$; se abbiamo $B \subset C$ e anche $C \subset D$, allora $A \subset D$. La relazione è quindi riflessiva, anti-simmetrica e transitiva. In altre parole, si tratta di una relazione di equaivalenza.

(b) Abbiamo che $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$. I quattro sottoinsiemi di un elemento, non contengono altri sottoinsiemi di A e sono quindi elementi minimali nel ordinamento parziale. Similmente i quattro sottoinsiemi di cardinalità 3 sono elementi massimali.

(c) Non c'è nessun elemento di P che contiene ogni altro elemento di P. Non esiste quindi un massimo assoluto. Similmente, non esiste nessun elemento di P contenuto in ogni altro elemento di P e non esiste un minimo assoluto.

(d) I maggioranti comuni di $\{1\}$ e $\{2\}$ sono $\{1, 2, 3\}$ e $\{1, 2, 4\}$. Non esiste quindi un maggiorante comune che è contenuto in ogni altro maggiorante. Concludiamo che $\sup(\{1\}, \{2\})$ non esiste.