G. Pareschi

RELAZIONI. RELAZIONI DI EQUIVALENZA.

1. Definizione e terminologia

Definizione 1.1 (Relazione)**.** Dati due insiemi A e B, un sottoisieme $R \subseteq A \times B$ è detto una relazione (*binaria*) tra A e B.
Se $A = B$, allora R è semplicemente detto una relazione (*binaria*) su A.

Notazione 1.2. Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione tra A e B. Dati $a \in A$ e $b \in B$, per indicare che $(a, b) \in R$ a volte si scrive $a\,R\,b$. A volte, invece che con una lettera maiuscola come R, una relazione si indica con i simboli $\sim$ oppure $\equiv$ (soprattutto nel caso di relazioni di equivalenza (vedi dopo)) o anche $\leq$ (soprattutto nel caso di relazioni d'ordine, vedi il file successivo).

Esempio/Esercizio 1.3. (a) Abbiamo visto che le *funzioni* tra A e B sono particolari relazioni tra A e B.
(b) Sia A un insieme e consideriamo la funzione identità $id : A \to A$. Qual è il corrispondente sottoinsieme $R \subseteq A \times A$?
(c) Sia $A = \{x, y, z, t\}$. Il sottoinsieme $R = \{(x, z), (y, t), (t, t)\}$ è una relazione su A.
(d) Consideriamo la relazione R su $\mathbb{R}$ così definita: $x\,R\,y$ se e solo se $x^2 = y^2$. Il sottoinsieme $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \pm y\}$.

Esercizio 1.4. Data la R dell'Esempio 1.3(c) e $S = \{(x, x), (y, y), (z, z), (t, t), (x, t), (t, x)\}$ determinare le relazioni $R \cup S$ e $R \cap S$.

Quando gli insiemi A e B sono *finiti*, con $|A| = m$ e $|B| = n$, una relazione può essere descritta da una matrice M_R con m righe e n colonne, a coefficienti 0 o 1[1], nel modo seguente: siano $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Si definisce

$$M_R = (a_{ij})_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}, \qquad \text{dove} \qquad a_{ij} = 1 \text{ se } (a_i, b_j) \in R \quad \text{e} \quad a_{ij} = 0 \text{ se } (a_i, b_j) \notin R.$$

Per esempio la matrice della relazione dell'Esempio 1.3(c) è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se $A = B$, (sempre nel caso *finito*), un altro modo per "rappresentare" la relazione consiste in un "grafo" i cui vertici sono gli elementi di A e due elementi $a, b \in A$ sono collegati da una freccia orientata da a a b se e solo se $(a, b) \in R$ (se $(a, a) \in R$ si disegna una freccetta tonda attorno ad a).

Per finire, definiamo la *composizione* di relazioni, che è una generalizzazione della composizione di funzioni

Definizione 1.5. Siano A, B e C tre insiemi. Siano R una relazione tra A e B e S una relazione tra B e C. La relazione $S \circ R$ è definita nel modo seguente: dati $a \in A$ e $c \in C$, $a\,(R \circ S)\,c$ se e solo se esiste $b \in B$ tale che $a\,R\,b$ e $b\,R\,c$.

[1] Una tale matrice è talvolta detta una *matrice booleana*

È facile vedere che la composizione di relazioni è un'operazione associativa (esercizio).

Esempio/Esercizio 1.6. Sia $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $C = \mathcal{P}(\{x, y, z\})$. Sia

$$R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$$

e sia

$$S = \{(1, \{x, y\}), (1, \emptyset), (3, \{y\}), (3, \{x, y\}), (4, \{x, z\}), (5, \emptyset), (5\{x, y, z\})\}.$$

Determinare $R \circ S$.

Supponendo $A = B = C$, dal punto di vista grafico, la composizione di due relazioni su A è il grafo i cui vertici sono gli elementi di A e i cui segmenti orientati sono la giustapposizione di un segmento orientato di R e di un segmento orientato di S, nell'ordine.

Dal punto di vista delle matrici, è facile vedere che la matrice $M_{R \circ S}$ è uguale al "prodotto booleano" $M_R \circ M_S$ (l'usuale prodotto righe per colonne usando la somma e il prodotto "booleani" (somma: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 1$, prodotto: $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$). Il motivo è il seguente (per chi conosce il prodotto righe per colonne di matrici): se $M_R = (a_{ij})$ e $M_S = (b_{hk})$, il coefficiente i, k di $M_R \circ M_S$ è $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$ (dove " $\cdot$ " indica il prodotto booleano). Quindi $c_{ik} = 1$ se e solo se esiste almeno un $j = 1, ..., n$ tale che $a_{ij} = 1$ (cioè $(a_i, b_j) \in R$) e $b_{jk} = 1$ (cioè $(b_j, c_k) \in S$). Quindi, $c_{ik} = 1$ se e solo se $(a_i, c_k) \in R \circ S$.

Esempio/Esercizio 1.7. Sia $A = \mathcal{P}(\{0, 1\})$. Sia inoltre R la relazione su A definita come segue: dati $B, C \subset \{0, 1\}$, $B\,R\,C$ se e solo se $B \subseteq C$. Sia inoltre S la relazione su A definita come segue: $B\,S\,C$ se e solo se $B \cap C = \emptyset$. Determinare i sottoinsiemi di $A \times A$ corrispondenti a R, S, e $R \circ S$. Trovare M_R, M_S e verificare direttamente che $M_{R \circ S} = M_R \circ M_S$.

Abbiamo che

$$A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

Si ha che

$$R = \big\{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{0\}), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{0, 1\}), (\{0\}, \{0\}), (\{0\}, \{0, 1\}), (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{0, 1\}), (\{0, 1\}, \{0, 1\})\big\}$$

Dunque

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Passando a S, si ha che

$$S = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{0\}), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{0, 1\}), (\{0\}, \emptyset), (\{0\}, \{1\}), (\{1\}, \emptyset), (\{1\}, \{0\}), (\{0, 1\}, \emptyset)\}$$

Dunque

$$M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A voi completare l'esercizio (Trovare il sottoinsieme corrispondente a $R \circ S$, $M_{R \circ S}$ e $M_R \circ M_S$.

Ripetere l'esercizio con $S \circ R$.

2. Proprietà notevoli delle relazioni

Da questo punto in poi supporremo sempre $A = B$. In altre parole, consideremo sempre relazioni su un insieme. Saremo interessati specialmente a relazioni che godono delle seguenti propretà.

Definizione 2.1. Sia A un insieme e R una relazione su A. R è detta
(a) *riflessiva* se $a\,R\,a$ per ogni $a \in A$ (in altre parole: $(a, a) \in R$ per ogni $a \in A$) .
(b) *simmetrica* se vale la seguente proprietà: $a\,R\,b$ implica $b\,R\,a$ (in altre parole, se $(a, b) \in R$ allora anche $(b, a) \in R$).
(c) *antisimmetrica* se vale la seguente proprietà: $a\,R\,b$ e $b\,R\,a$ implica $a = b$ (in altre parole: se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ allora $a = b$).
(c) *transitiva* se vale la seguente proprietà: $a\,R\,b$ e $b\,R\,c$ implica $a\,R\,c$ (in altre parole: se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ allora $(a, c) \in R$).

Osservazione 2.2. Supponiamo A un insieme *finito*. Dal punto di vista della rappresentazione tramire matrici booleane (vedi sezione precedente) si ha che:
- R è riflessiva se e solo se gli elementi della diagonale principale della matrice M_R sono tutti uguali a 1: $a_{ii} = 1$ per ogni $i = 1, ..., |A|$.
- R è simmetrica se e solo se M_R è una matrice *simmetrica*: $a_{ij} = aji$ per ogni $i, j = 1, ..., |A|$ (cioè, graficamente, simmetrica rispetto alla diagonale principale).

Esempi 2.3. (a) Sia $X = \{a, b, c, d\}$. La relazione $\{(a, a), (a, b), (b, b), (c, b), (c, d), (d, b), (d, d)\}$ non è né riflessiva (non contiene (c, c)), né simmetrica (ad esempio, contiene (a, b) ma non contiene (b, a)). Invece è transitiva: per ogni terna $h, k, l \in \{a, b, c, d\}$ tali che $((h, k) \in R$ e $(k, l) \in R$, anche $(h, l) \in R$.

(b) Sia A un insieme non vuoto, e sia $X = \mathcal{P}(A)$. Si consideri la relazione R su X così definita: dati $B, C \in \mathcal{P}(A)$, $B\,R\,C$ se $B \cap C = \emptyset$.
- R non è riflessiva, perchè, se $B \neq \emptyset$, $B \cap B = B \neq \emptyset$. Quindi B non è in relazione con sé stesso.
- R è simmetrica. Infatti $B \cap C = \emptyset$ se e solo se $C \cap B = \emptyset$.
- R non è antisimmetrica. Ad esempio: sia $a \in A$, Allora $\emptyset\,R\,\{a\}$, perchè $\emptyset \cap \{a\} = \emptyset$. Anche $\{a\}\,R\,\emptyset$, perchè R è simmetrica. Però $\emptyset \neq \{a\}$.
- R non è transitiva. Infatti $\{a\}\,R\,\emptyset$ e $\emptyset\,R\,\{a\}$, ma $\{a\}$ e $\{a\}$ non sono in relazione.

Definizione 2.4 (Relazione di equivalenza)**.** Una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva è detta una relazione di equivalenza.

Definizione 2.5 (Relazione d'ordine (parziale))**.** Una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva è detta una relazione d'ordine parziale (o ordinamento parziale).

3. Relazioni di equivalenza

Esempio 3.1. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$. La relazione su X:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

è di equivalenza (verificatelo).

Esempio 3.2. Sia $X = \mathbb{R} - \{0\}$. La relazione R su X così definita: $x\,R\,y$ se e solo se $x\,y > 0$, è una relazione di equivalenza. Infatti:
- R è riflessiva: per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $x\,x > 0$. Dunque $x\,R\,x$ per ogni $x \in X$.
- R è simmetrica: se $x\,y > 0$ allora anche $y\,x > 0$. Quindi, se $x\,R\,y$ allora $y\,R\,x$.
- R è transitiva: se $x\,y > 0$ e $y\,z > 0$ allora $x\,z > 0$ (infatti, ne segue che $x\,y\,y\,z > 0$. Dunque

$xz = \frac{x\,y\,y\,z}{y\,y} > 0$). In altre parole: se $x\,R\,y$ e $y\,R\,z$, allora $x\,R\,z$.
Si noti che $x\,R\,y$ se e solo se x e y "hanno lo stesso segno", cioè sono entrambi positivi o entrambi negativi.

Esempio 3.3. La relazione R su $\mathbb{Z}$ definita come segue: *$a\,R\,b$ se e solo se $a-b$ è pari* è di equivalenza. Infatti:
- R è riflessiva: per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0$ è pari[2]. Dunque $a\,R\,a$.
- R è simmetrica: se $a - b$ è pari, anche $b - a$ è pari. Dunque $a\,R\,b$ implica $b\,R\,a$.
- R è transitiva: $a - b$ è pari e $b - c$ è pari, anche $a - c$ è pari (infatti $a - c = (a - b) + (b - c)$ e la somma di numeri pari è pari). Dunque, se $a\,R\,b$ e $b\,R\,c$, allora $a\,R\,c$.
Si noti che $a\,R\,b$ se e solo se a e b sono entrambi pari o entrambi dispari. Infatti, se a e b sono pari, la loro differenza è pari. Se a e b sono dispari, la loro differenza è pari. Invece, se a è dispari e b è pari, o viceversa, la loro differenza è dispari.

I concetti di relazione di equivalenza e di "passaggio al quoziente rispetto ad una relazione di equivalenza" sono tra i più importanti e ubiqui in matematica. In sintesi: se una relazione R su X è di equivalenza, allora possiamo considerare un nuovo insieme Q (l'insieme quoziente di X rispetto ad R) e una funzione suriettiva $\pi : X \to Q$ tali che:
$(*)$ *dati $x, y \in X$, $\pi(x) = \pi(y)$ se e solo se $x\,R\,y$.*
Visto che la funzione π è suriettiva, gli elementi di Q sono della forma $\pi(x)$, con $x \in X$. Dunque la proprietà $(*)$ si può esprimere, in modo suggestivo, così: *l'insieme quoziente di X rispetto a R è un nuovo insieme in cui elementi di X* equivalenti *(secondo R) diventano* uguali.

Definizione 3.4. *(Partizione)* Sia X un insieme. Una famiglia di sottoinsiemi $\{A_i\}_{i\in I}$ tali che:
(a) $A_i \neq \emptyset$ per ogni $i \in I$, ;
(b) $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i, j \in I$ tali che $i \neq j$;
(c) $\cup_{i\in I} A_i = X$; è detta una partizione di X.

In breve, una partizione di X è una famiglia di sottoinsiemi di X non vuoti, mutuamente disgiunti, la cui unione è tutto X.

Esempio 3.5. (a) Sia $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Allora i sottoinsiemi $A_1 = \{a, f\}$, $A_2 = \{b\}$, $A_3 = \{c, d, e, g\}$ formano una partizione di X.
(b) Sia X come sopra. I sottoinsiemi $B_1 = \{a, f, g\}$, $B_2 = \{b, c\}$, $B_3 = \{d, f\}$ *non* formano una partizione di X (ce ne sono due che non sono disgiunti).
(c) Sia X come sopra. I sottoinsiemi $C_1 = \{b, g\}$, $C_2 = \{c\}$, $C_3 = \{a, d\}$ *non* formano una partizione di X (la loro unione non è tutto X).

Definizione 3.6. *(Classe di equivalenza)* Sia X un insieme, sia R una relazione di equivalenza su X, e sia $x \in X$. Il sottoinsieme di X:

$$[x] := \{y \in X \mid x\,R\,y\}$$

è detto la classe di equivalenza di x rispetto alla relazione R.

Esempi 3.7. (a) Nell'esempio 3.1 le classi di equivalenza dei vari elementi di X sono: $[1] = [2] = [3] = \{1, 2, 3\}$ e $[4] = \{4\}$.
(b) Nell'esempio 3.2 le classi di equivalenza dei vari elementi di X sono due: la classe formata da tutti gli elementi positivi e la classe formata da tutti gli elementi negativi. In altre parole se x è positivo, allora $[x] = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}$. Invece, se x è negativo, $[x] = \{z \in \mathbb{R} \mid z < 0\}$.

[2]Per numero pari si intende un numero della forma $2h$, con $h \in \mathbb{Z}$. Dunque 0 è pari, perchè $0 = 2 \cdot 0$

(c) Nell'esempio 3.3 le classi di equivalenza sono due: quella formata da tutti i numeri pari e quella formata da tutti i numeri dispari.

La seguente Proposizione dice che la famiglia delle classi di equivalenza è una *partizione.* Cominciamo con il seguente

Lemma 3.8. *Sia X un insieme e sia R una relazione di equivalenza su X. Siano $x, y \in R$. Allora $[x] = [y]$ se e solo se $x\,R\,y$.*

Proof. Se $[x] = [y]$ allora $y \in [x]$ (infatti, per la riflessività di R, $y \in [y]$). Quindi, per definizione di x, $x\,R\,y$.
Viceversa: supponiamo che $x\,R\,y$. Innanzitutto si ha che $[y] \subseteq [x]$. Infatti, se $y\,R\,z$, allora, per la transitività di R, $x\,R\,z$. Quindi $[y] \subseteq [x]$, come asserito. D'altra parte, per la simmetria di R, anche $y\,R\,x$. Dunque, ragionando come sopra, $[x] \subseteq [y]$. Mettendo insieme le due inclusioni, si ha che $[x] = [y]$. □

Definizione/Proposizione 3.9 (Partizione in classi di equivalenza)**.** Sia X un insieme e sia R una relazione di equivalenza su X. Allora le classi di equivalenza degli elementi di X rispetto ad R formano una partizione di X. Tale partizione è detta partizione di X in classi di equivalenza rispetto ad R.

Proof. (a) Tutte le classi di equivalenza di elementi di X sono non vuote (per la riflessività, $[x]$ contiene almeno x stesso).
(b) Supponiamo che $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Sia $z \in [x] \cap [y]$. Allora, per definizione di $[x]$, $x\,R\,z$. Inoltre, per definizione di $[y]$, $y\,R\,z$. Quindi, per la simmetria di R, $z\,R\,y$. Dunque, per la transitività di R, $x\,R\,y$ e, per il Lemma 3.8, $[x] = [y]$. Riassumendo, abbiamo dimostrato che se $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ allora $[x] = [y]$.
(c) Per ogni $x \in X$, x sta in una classe di equivalenza. Infatti, per la riflessività, $x \in [x]$. □

Esempi 3.10. (a) Nell'Esempio 3.1, la partizione è formata dai sottoinsiemi $\{1, 2, 3\}$ e $\{4\}$.
(b) Nell'esempio 3.2, la partizione è formata dai due sottoinsiemi di X: $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ e $A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.
(c) Nell'esempio 3.3, la partizione è formata dai due sottoinsiemi $A_1 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ è pari }\}$ e $A_2 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ è dispari }\}$

Abbiamo anche una sorta di "viceversa" della Proposizione 3.9:

Proposizione 3.11. Sia X un insieme e sia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ una sua partizione. Allora esiste sempre, ed è unica, una relazione di equivalenza R su X tale che la partizione di X in classi di equivalenza rispetto ad R è $\mathcal{A}$.

Proof. Definiamo R come segue: $x\,R\,y$ se e solo se esiste $i \in I$ tale che x e y appartegono ad A_i.
(a) R è riflessiva. Infatti, per la proprietà (c) delle partizioni, per ogni $x \in X$ esiste un $i \in I$ tale che $x \in A_i$. Dunque $x\,R\,x$.
(b) R è chiaramente simmetrica. Infatti $x\,R\,y$ significa che esiste un $i \in I$ tale che sia x che y appartengono ad A_i e $y\,R\,x$ significa che esiste un $i \in I$ tale che sia y che x appartengono ad A_i.
(c) R è transitiva. Infatti $x\,R\,y$ significa che esiste un $i \in I$ tale che x a y appartengono ad A_i. D'altra parte $y\,R\,z$ significa che esiste un $j \in I$ tale che y e z appartengono ad A_j. Poichè y appartiene sia ad A_i che ad A_j, e $\mathcal{A}$ è una partizione, ne segue che $i = j$. Dunque x e z appartengono ad A_i, e quindi $x\,R\,z$. □

Esempio 3.12. Si consideri la partizione dell'Esempio 3.5. La corrispondente relazione di equivalenza è

$$R = \{(a,a),(a,f),(f,a),(f,f),(b,b),(c,c),(c,d),(d,c),(c,e),(e,c),(d,d),(d,e),(e,d),(d,g),(g,d),$$
$$(e,e),(e,g),(g,e),(g,g)\}$$

In sintesi, possiamo dire che dare una relazione di equivalenza su X equivale a dare una partizione di X: data una relazione di equivalenza, essa induce la partizione in classi di equivalenza. Viceversa, data una partizione, essa induce la relazione di equivalenza della Prop. 3.11. Le due "operazioni" sono una inversa dell'altra.

Definizione 3.13 (Insieme quoziente e proiezione canonica)**.** Sia X un insieme e R una relazione di equivalenza su X. Allora l'insieme quoziente di X rispetto ad R (denotato Q o X/R) è, per definizione, l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza di X rispetto ad R:

$$Q = \{[x] \mid x \in X\}.$$

La proiezione canonica di X su Q è la funzione (evidentemente suriettiva)

$$\pi : X \to Q, \qquad \text{definita da} \quad \pi(x) = [x].$$

Esempi 3.14. (a) Nell'esempio 3.1 l'insieme quoziente ha due elementi: $Q = \{\{1,2,3\},\{4\}\}$ e la proiezione $\pi : X \to Q$ è: $\pi(1) = \pi(2) = \pi(3) = \{1,2,3\}$, $\pi(4) = \{4\}$.
(b) Nell'esempio 3.2 l'insieme quoziente ha due elementi: il sottoinsieme dei numeri positivi e il sottoinsieme dei numeri negativi. $Q = \{[1],[-1]\}$.
(c) Nell'esempio 3.3 l'insieme quoziente ha due elementi $Q = \{[0],[1]\}$ (il sottoinsieme dei numeri interi pari e il sottoinsieme dei numeri interi dispari).
(d) Nell'esempio 3.5, l'insieme quoziente è $Q = \{\{a,f\},\{b\},\{c,d,e,g\}\}$.
(e) Sia A un insieme finito e sia $X = \mathcal{P}(A)$. Sia R la relazione su X definita come segue: $B\,R\,C$ se e solo se $|B| = |C|$. Si verifica che R è di equivalenza. Le classi di equivalenza sono: la classe dei sottoinsiemi di A con zero elementi (costituita dal solo insieme vuoto), la classe dei sottoinsiemi di A con un elemento, la classe dei sottoinsiemi di A con due elementi, $\cdots\ \cdots$, la classe dei sottoinsiemi di A con $|A|$ elementi (c'è solo A). L'insieme quoziente ha $|A|+1$ elementi (tanti quante le cardinalità dei sottoinsiemi di A).

4. Alcune relazioni di equivalenza notevoli

Lo scopo di questa sezione è duplice. Vedremo altri esempi (tre, per la precisione) di relazioni di equivalenza, il che aumenterà (o dovrebbe aumentare) la familiarità della/o studentessa/studente con i vari concetti coinvolti. D'altra parte, le tre costruzioni in questione hanno un interesse specifico. Il primo esempio è la costruzione dei numeri interi a partire dai numeri naturali. Il secondo è la costruzione dei numeri razionali a partire dai numeri interi[3]. Il terzo esempio è la la relazione di *congruenza modulo n*, che sarà una grande protagonista del seguito del nostro Corso.

---

[3]Si potrebbe fare anche la costruzione dei numeri reali a partire dai razionali, tramite il procedimento detto *completamento* (limiti di successioni di Cauchy a valori razionali), che è un altro esempio di relazione di equivalenza. La omettiamo perchè dovremmo usare delle nozioni di Analisi che non sono prerequisito al nostro Corso.

4.1. **Costruzione degli interi a partire dai naturali.** Sia $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Consideriamo la relazione di equivalenza R su X definita come segue: dati (a, b) e (c, d) in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b)\, R\, (c, d)$ se $a + d = b + c$. Si ha che R è una relazione di equivalenza. Infatti:
(a) R è riflessiva, cioè $(a, b)\, R(a, b)$ per ogni $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Infatti $a + b = b + a$.
(b) R è simmetrica. Infatti $a + d = b + c$ implica $c + b = d + a$. Quindi se $(a, b)\, R\, (c, d)$ allora $(c, d)\, R\, (a, b)$.
(c) R è transitiva. Infatti, se $(a, b)\, R\, (c, d)$, cioè $a + d = b + c$, e $(c, d)\, R\, (e, f)$, cioè $c + f = d + e$, allora $a + d + c + f = b + c + d + e$. Dunque $a + f = b + e$, cioè $(a, b)\, R\, (e, f)$.

Sia Q l'insieme quoziente. Quello che si fa in matematica è di definire $\mathbb{Z} := Q$. Quello che invece faremo noi, è di supporre di sapere chi è $\mathbb{Z}$, e di mostrare che c'è una funzione biettiva "canonica" $f : Q \to \mathbb{Z}$. La funzione è definita come segue: $f([(a, b)]) = b - a$. Si noti che la funzione è *ben definita* Questo significa, nel caso in questione, che se $[(a, b)] = [(c, d)]$ (cioè $(a, b)\, R\, (c, d)$), allora $f([(a, b)]) = f([(c, d)])$ (altrimenti la definizione di f non avrebbe senso). Infatti, se $(a, b)\, R\, (c, d)$ allora $a + d = b + c$, dunque $b - a = d - c$, cioè $f([(a, b)]) = f([(c, d)])$, che è quello che volevamo.

Inoltre f è biettiva. Infatti la funzione $g : Q \to \mathbb{Z}$ definita da

$$g(a) = [(1, a + 1)] \quad \text{se } a \geq 1 \quad \text{e} \qquad g(a) = [(-a + 1, 1)] \quad \text{se } a \leq 0,$$

è inversa di f. Infatti $g(f([(a, b)]))) = g(b - a)$. Se $b - a \geq 1$, allora $g(b - a) = [(1, b - a + 1])$ che a sua volta è uguale ad $[(a, b)]$ (infatti $1 + b = b - a + 1 + a$). Se, invece, $b - a \leq 0$, allora $g(b - a) = [(a - b + 1, 1)]$, che a sua volta è uguale ad $[(a, b)]$ (infatti $a - b + 1 + b = 1 + a$).
Si potrebbe anche mostrare che le due operazioni di $\mathbb{Z}$ (la somma e il prodotto) possono essere definite su Q usando la somma e il prodotto in $\mathbb{N}$.

4.2. **I razionali a partire dagli interi.** Sia $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$. Si consideri la relazione R su X così definita: dati $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$, $(a, b)\, R\, (c, d)$ se $ad = bc$. Si ha che R è una relazione di equivalenza. Infatti:
(a) R è riflessiva, cioè $(a, b)\, R(a, b)$ per ogni $(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$. Infatti $ab = ba$.
(b) R è simmetrica. Infatti $ad = bc$ implica $cb = da$. Quindi se $(a, b)\, R\, (c, d)$ allora $(c, d)\, R\, (a, b)$.
(c) R è transitiva. Infatti, se $(a, b)\, R\, (c, d)$, cioè $ad = bc$, e $(c, d)\, R\, (e, f)$, cioè $cf = de$, allora $adcf = bcde$. Poichè $d \neq 0$, ciò è equivalente a $acf = bce$. Se anche $c \neq 0$ allora $af = be$, cioè $(a, b)\, R\, (e, f)$. Ciò accade anche se $c = 0$. Infatti, in questo caso, la $ad = bc$ implica $a = 0$ e la $cf = de$ implica $e = 0$. Dunque, abbiamo ancora che $af = be$, cioè che $(a, b)\, R\, (e, f)$.

Sia Q l'insieme quoziente. Ripetiamo passo passo quanto detto nell'esempio precedente: quello che si fa in matematica è di definire $\mathbb{Q} := Q$. Quello che invece faremo noi, è di supporre di sapere chi è $\mathbb{Q}$, e di mostrare che c'è una funzione biettiva "canonica" $h : Q \to \mathbb{Q}$. La funzione è definita come segue: $h([(a, b)]) = \frac{a}{b}$. Si noti che la funzione è *ben definita* Questo significa, nel caso in questione, che se $[(a, b)] = [(c, d)]$ (cioè $(a, b)\, R\, (c, d)$), allora $h([(a, b)]) = h([(c, d)])$ (altrimenti la definizione di h non avrebbe senso): se $(a, b)\, R\, (c, d)$ allora $ad = bc$, dunque $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, cioè $h([(a, b)]) = h([(c, d)])$, che è quello che volevamo.

Inoltre h è biettiva. Infatti è iniettiva: $h([(a, b)]) = h([c, d])$ significa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ cioè $ad = cb$, cioè $[(a, b)] = [c, d]$. Inoltre h è suriettiva, perchè, dato un qualsiasi $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, abbiamo che $\frac{a}{b} = h([(a, b)])$.
Si potrebbe anche mostrare che le due operazioni di $\mathbb{Q}$ (la somma e il prodotto) possono essere definite su Q a partire dalla somma e dal prodotto in $\mathbb{Z}$.

4.3. **La congruenza modulo n.** Sia n un numero naturale fissato. Definiamo una relazione R_n su $\mathbb{Z}$ come segue: dati $a, b \in \mathbb{Z}$, $a\, R_n\, b$ se $b - a$ è un multiplo di n, ossia se esiste un $k \in \mathbb{Z}$ tale che $a - b = kn$. Invece che scrivere $a\, R_n\, b$, è tradizione scrivere

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

- La relazione è riflessiva: per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $a \equiv a \pmod{n}$. Infatti $a - a = 0\, n$.
- La relazione è simmetrica: se $a \equiv b \pmod{n}$, cioè esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $b - a = kn$, anche $a - b = (-k)n$, cioè $b \equiv a \pmod{n}$.
- La relazione è transitiva: se $a \equiv b \pmod{n}$ (cioè esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $b - a = kn$) e $b \equiv c \pmod{n}$ (cioè esiste $h \in \mathbb{Z}$ tale che $c - b = hn$), allora $c - a = c - b + b - a = hn + kn = (h+k)n$. Quindi $a \equiv c \pmod{n}$.

Queste relazioni di equivalenza (ce n'è una per ogni $n \in \mathbb{N}$) verranno analizzate meglio nel seguito del corso. A questo punto, ci limitiamo a descrivere euristicamente l'insieme quoziente, che si denota $\mathbb{Z}_n$.

Fissiamo, ad esempio, $n = 3$. Osserviamo che $a \equiv b \pmod{3}$ se e solo se a e b sono entrambi multipli di tre, oppure sono entrambi della forma $3k + 1$ (con $k \in \mathbb{Z}$), oppure sono entrambi della forma $3k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$. Dunque l'insieme quoziente $\mathbb{Z}_3$ ha tre elementi: il primo elemento è $[0] = [3] = [-3] = [6] = [-6] = \cdots$, cioè il sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ formato dai multipli di 3.
Il secondo elemento è $[1] = [-2] = [4] = [-5] = [7] = [-8] = \cdots$, il sottoinsieme dei numeri della forma $3k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.
Il terzo è $[2] = [-1] = [5] = [-4] = \cdots$, il sottoinsieme dei numeri della forma $3k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$.

In generale, si può mostrare, allo stesso modo, che $\mathbb{Z}_n$ ha esattamente n elementi: $[0]$, $[1]$,..., $[n-1]$, cioè i sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ formati dai numeri della forma nk, $nk + 1$,...,$nk + n - 1$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio 4.1. Si noti che, per $n = 2$, si ritrova la relazione dell'Esempio 3.3.

5. Raccolta di alcuni esercizi tratti da compiti d'esame.

Attenzione: questi sono alcuni esercizi d'esame, sugli argomenti di questa dispensa. Non sono una selezione di quelli che ritengo più significativi, ma solamente quelli tratti dagli appelli di cui sono in possesso del file sorgente. Siete quindi invitati a cercare di risolvere gli esercizi, su questi argomenti, tratti dai TUTTI gli esami degli anni passati (oltre agli esercizi assegati, naturalmente).

Esercizio 5.1. Sia $X = \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ e si considerino le seguenti relazioni R,S,T:
- dati A e B in X, $A\, R\, B$ se e solo se $|A \cap B|$ é un numero pari (in questo esercizio lo 0 viene considerato un numero pari);
- dati A e B in X, $A\, S\, B$ se e solo se $A \cap B^c = \emptyset$;
- dati A e B in X, $A\, T\, B$ se e solo se $|A| = |B|$ o $|A| = |B^c|$.

Per ognuna delle relazioni precedenti, stabilire se sono relazioni d'ordine oppure no, e se sono relazioni di equivalenza oppure no. In caso di relazione di equivalenza, descrivere tutte le classi di equivalenza.

Soluzione. - R non è ne' d'ordine ne' di equivalenza, perchè non è transitiva. Ad esempio: $\{a, b\}\, R\, \{a, b, c, d\}$ perchè $|\{a, b\} \cap \{a, b, c, d|| = |\{a, b\}| = 2$. Allo stesso modo, $\{a, b, c, d\}\, R\, \{a, c\}$. Però $|\{a, b\} \cap \{a, c\}| = |\{a\}| = 1$. Quindi $\{a, b\}$ non è in relazione, secondo R, con $\{a, c\}$.

- S è una relazione d'ordine e non di equivalenza. Infatti, sappiamo che $A \cap B^c = \emptyset$ significa $A \subseteq B$.

- T non è una relazione d'ordine (non è antisimmetrica). T è una relazione di equivalenza (vedi Es. 3, primo appello 2003-'04, 28.04.'04) e ci sono tre classi di equivalenza :

$$\big\{\emptyset, \{a,b,c,d\}\big\}, \qquad \big\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\big\}$$

$$\big\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\big\}.$$

Esercizio 5.2. Sia $X = \mathcal{P}(\{0,1\}) \times \mathcal{P}(\{0,1\})$. Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ su X definita come segue: $(A,B)\,\mathcal{R}\,(C,D)$ se $A \cup B = C \cup D$. Stabilire se $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza e, in caso affermativo, descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza.

SOLUZIONE. Si ha che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza. Infatti:

- $\mathcal{R}$ è riflessiva, perchè $A \cup A = A \cup A$ per ogni $A \in \mathcal{P}(\{0,1\})$.

- $\mathcal{R}$ è simmetrica, perchè se $A \cup B = C \cup D$ allora $C \cup D = A \cup B$.

- $\mathcal{R}$ è transitiva, perchè se $A \cup B = C \cup D$ e $C \cup D = E \cup F$ allora anche $A \cup B = E \cup F$. Le classi di equivalenza sono quattro, e precisamente:
$\Big\{(\emptyset,\emptyset)\Big\}$, cioè le coppie la cui unione è $\emptyset$
$\Big\{(\emptyset,\{0\}),(\{0\},\emptyset),(\{0,\},\{0\})\Big\}$, cioè le coppie la cui unione è $\{0\}$
$\Big\{(\emptyset,\{1\}),(\{0\},\emptyset),(\{1\},\{1\})\Big\}$, cioè le coppie la cui unione è $\{1\}$
$\Big\{(\{0\},\{1\}),(\{1\},\{0\}),(\{0\},\{0,1\}),(\{0,1\},\{0\}),(\{1\},\{0,1\}),(\{0,1\},\{1\}),(\{0,1\},\{0,1\})\Big\}$, cioè le coppie la cui unione è $\{0,1\}$.

Esercizio 5.3. Sia $X = \{a,b\}$ e si denoti $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$. Si considerino le relazioni R ed S su $\mathcal{A}$ definite come segue. Dati (A,B) e (C,D) in $\mathcal{A}$:
(i) $(A,B)\,R\,(C,D)$ se $A \cap B = C \cap D$, (ii) $(A,B)\,S\,(C,D)$ se $A \cap B \subseteq C \cap D$.
(a) Stabilire se R o S sono relazioni di equivalenza o relazioni d'ordine.
(b) Nel caso di relazione di equivalenza, determinare le classi di equivalenza.

Soluzione. (a) R è di equivalenza. Infatti:
- R è riflessiva, perchè $A \cap B = A \cap B$ per ogni (A,B) in $\mathcal{A}$.
- R è simmetrica, perchè se $A \cap B = C \cap D$ allora $C \cap D = A \cap B$.
- R è transitiva, perchè se $A \cap B = C \cap D$ e $C \cap D = E \cap F$ allora $A \cap B = E \cap F$.

S non è di equivalenza, perchè non è simmetrica. Per esempio:
$(\emptyset,\emptyset)\,S\,(\{a\},\{a\})$ (perchè $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset \subseteq \{a\} \cap \{a\} = \{a\}$), però $(\{a\},\{a\}) \not S (\emptyset,\emptyset)$ (perchè $\{a\} \cap \{a\} = \{a\}$ non è contenuto in $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$).

S non è una relazione d'ordine, perchè non è antisimmetrica. Ad esempio:
$(\emptyset,\emptyset)\,S\,(\emptyset,\{a\})$ (perchè $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset \subseteq \emptyset \cap \{a\} = \emptyset$) e anche $(\emptyset,\{a\})\,S\,(\emptyset,\emptyset)$ (per lo stesso motivo), ma $(\emptyset,\emptyset) \neq (\emptyset,\{a\})$.

(b) Poichè R è una relazione di equivalenza, determiniamone le classi di equivalenza. Esse sono quattro, e precisamente:

(1) l'insieme delle coppie (A, B) tali che $A \cap B = \emptyset$:

$$\big\{(\emptyset,\emptyset),(\emptyset,\{a\}),(\emptyset,\{b\}),(\emptyset,\{a,b\}),(\{a\},\emptyset),(\{b\},\emptyset),(\{a,b\},\emptyset),(\{a\},\{b\}),(\{b\},\{a\})\big\}.$$

(2) l'insieme delle coppie (A, B) tali che $A \cap B = \{a\}$:

$$\big\{(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a,b\}),(\{a,b\},\{a\})\big\}$$

(3) l'insieme delle coppie (A, B) tali che $A \cap B = \{b\}$:

$$\big\{(\{b\},\{b\}),(\{b\},\{a,b\}),(\{a,b\},\{b\})\big\}$$

(4) l'insieme delle coppie (A, B) tali che $A \cap B = \{a, b\}$:

$$\big\{(\{a,b\},\{a,b\})\big\}.$$

Esercizio 5.4. Sia $X = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$. (a) Si consideri la relazione R su X così definita: dati $(a, b) \in X$ e $(c, d) \in X$, $(a, b)\, R\, (c, d)$ se $a + d = b + c$. Stabilire se R è una relazione di equivalenza e, in caso affermativo, descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza.
(b) Si consideri la relazione S su X così definita: dati $(a, b) \in X$ e $(c, d) \in X$, $(a, b)\, S\, (c, d)$ se $a \cdot d = b \cdot c$. Stabilire se S è una relazione di equivalenza e, in caso affermativo, descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza.

Soluzione.
(a) R è una relazione di equivalenza. Infatti:

- R è riflessiva, cioè $(a.b)\, R\, (a, b)$ per ogni $(a, b) \in X$. Infatti $a + b = b + a$

- R è riflessiva, cioè $(a.b)\, R\, (a, b)$ per ogni $(a, b) \in X$.

- R è simmetrica. Infatti, se $(a, b)\, R\, (c, d)$, cioè $a + d = b + c$, allora $c + b = d + a$, cioè $(c, d)\, R\, (a, b)$.

- R è transitiva. Infatti, se $(a, b)\, R\, (c, d)$ e $(c, d)\, R\, (e, f)$, cioè se $a+d = b+c$ se $c+f = d+e$, allora $a + d + c + f = b + c + d + e$, cioè $a + f = b + e$. Dunque $(a, b)\, R\, (e, f)$.

Per determinare le classi di equivalenza, è utile osservare che due coppie, (a, b) e (c, d), sono in relazione se e solo se $a - b = c - d$, cioè se e solo se la loro "differenza" è uguale. Dunque le classi di equivalenza corrisponderanno a tutte le possibili "differenze" di coppie di X, cioè: 0, 1, 2, -1, -2. Le classi sono:

$$\big\{(0,0),(1,1),(2,2)\big\}, \quad \big\{(1,0),(2,1)\big\}, \quad \big\{(2,0)\big\}, \quad \big\{(0,1),(1.2)\big\}, \quad \big\{(0,2)\big\}$$

(b) La relazione S non è una relazione di equivalenza perchè non è transitiva. Infatti la coppia $(0, 0)$ è in relazione con tutte le altre coppie, ma le altre coppie non sono tutte in relazione tra loro. Esempio: $(1, 1)\, S\, (0, 0)$, perchè $1 \cdot 0 = 1 \cdot 0$. Inoltre $(0, 0)\, S\, (1, 2)$, perchè $0 \cdot 1 = 0 \cdot 2$. Ma $(1, 1)$ non è in relazione con $(1, 2)$, perchè $1 \cdot 2 \neq 1 \cdot 1$.

Esercizio 5.5. Dato un numero naturale n, si denoti, come al solito, $\mathbf{D}_n = \{k \in \mathbf{N} | k \text{ divide } n\}$.

Sia $A = \mathbf{D}_6 \times \mathbf{D}_{15}$. Si considerino le relazioni R ed S su A così definite: dati (a, b) e (c, d) in A:
(i) $(a, b)\, R\, (c, d)$ se $m.c.m.(a, b) = m.c.m.(c, d)$; e (ii) $(a, b)\, S\, (c, d)$ se $m.c.m.(a, c) = m.c.m.(b, d)$.
(a) Stabilire se R è una relazione di equivalenza su A e, in caso affermativo, descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza. (b) Stabilire se S è una relazione di equivalenza su A e, in caso affermativo, descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza.

Soluzione. (a) Rifessività: dato $(a, b) \in A$, $m.c.m.(a, b) = m.c.m.(a, b)$;
Simmetria: dati $(a, b), (c, d) \in A$, se $m.c.m.(a, b) = m.c.m.(c, d)$ allora $m.c.m.(c, d) = m.c.m.(a, b)$.
Transitività: dati $(a, b), (c, d), (e, f) \in A$, se $m.c.m.(a, b) = m.c.m.(c, d)$ e $m.c.m.(c, d) = m.c.m.(e, f)$ allora $m.c.m.(a, b) = m.c.m.(e, f)$.
Quindi R è una relazione di equivalenza su A.

Le classi di equivalenza corrispondono a tutti i $m.c.m.$ tra un elemento di D_6 e un elemento di $\mathbf{D_{15}}$. Risultano essere otto, e precisamente:

$$\begin{array}{lllll} \{(1,1)\}, & \{(1,3),(3,3),(3,1)\}, & \{(1,5)\}, & \{(1,15),(3,5),(3,15)\}, & \{(2,1)\}, \\ & \{(2,3),(6,1),(6,3)\}, & \{(2,5)\}, & \{(2,15),(6,5),(6,15)\} & \end{array}$$

Esercizio 5.6. Sia $T = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 : a \neq 0 \text{ e } b \neq 0\}$. Sia $R \subset T \times T$ la relazione
$$R = \{((a, b), (a', b')) \in T \times T : aa' > 0 \text{ e } bb' > 0\ \}.$$

(a) Dimostrare che R è una relazione di equivalenza.

(b) Descrivere le classi di equivalenza. Quante sono?

(a) - per ogni $(a, b) \in T$ si ha che $((a, b), (a, b)) \in R$. Infatti $aa > 0$ e $bb > 0$. quindi la relazione è riflessiva.

- se $((a, b), (a', b')) \in R$ allora $((a', b'), (a, b)) \in R$. Infatti se $aa' > 0$ e $bb' > 0$ allora anche $a'a > 0$ e $b'b > 0$. Quindi la relazione è simmetrica.

- se $(a, b), (a', b')) \in R$ e $(a', b'), (a'', b'') \in R$ allora $((a, b), (a'', b'')) \in R$. Infatti il prodotto di due numeri reali (diversi da zero) è positivo se e solo se i due numeri hanno lo stesso segno. Quindi l'implicazione precedente significa se a e a' (risp. b e b') hanno lo stesso segno e a' e a'' (risp. b' e b'') hanno lo stesso segno allora anche a e a'' (risp. b e b'') hanno lo stesso segno, il che è chiaramente vero. Alternativamente, si può notare che che moltiplicando membro a membro le disuguglianze $aa' > 0$ e $a'a'' > 0$ si ottiene $aa'^2a'' > 0$, che è equivalente a $aa'' > 0$ perché $a'^2 > 0$. Lo stesso per la seconda coordinata.

(b) Da quanto sopra risulta che due coppie sono in relazione se e solo se le loro prime coordinate hanno lo stesso segno e le loro seconde coordinate hanno lo stesso segno. Ne consegue che le classi di equivalenza sono quattro: $\{(a, b) \in T : a > 0, b > 0\}$, $\{(a, b) \in T : a > 0, b < 0\}$, $\{(a, b) \in T : a < 0, b > 0\}$, $\{(a, b) \in T : a < 0, b < 0\}$, cioè i quattro quadranti.

Esercizio 5.7. Sia R la relazione su $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ definita nel modo seguente: si ha che $(n, m)R(n', m')$ se e solo se $n - m = n' - m'$

(a) Stabilire se R è una relazione di equivalenza;

(b) In caso affermativo, determinare quante sono le classi di equivalenza e descriverle.

(a) Siccome $n-m = n-m$ per ogni $(n, m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, la relazione è riflessiva. Se $(n, m)R(n', m')$, allora $n-m = n'-m'$ e quindi anche $n'-m' = n-m$ e vale $(n', m')R(n, m)$. La relazione è quindi simmetrica. Finalmente, se $(n, m)R(n', m')$ e $(n', m')R(n'', m'')$ allora si ha che $n - m = n' - m'$ e $n' - m' = n'' - m''$. Questo implica che vale anche $n - m = n'' - m''$ e quindi $(n, m)R(n'', m'')$. Concludiamo che la relazione è transitiva. Si tratta quindi di una relazione di equivalenza.

(b) Due 'punti' (n, m) e (n', m') appartengono alla stessa classe di equivalenza se e solo se le differenze $n - m$ e $n' - m'$ sono uguali. Questa differenza caratterizza quindi la classe di equivalenza. Siccome la differenza può essere un qualsiasi numero in $\mathbf{Z}$, vediamo che le classi di equivalenza corrispondono biettivamente agli elementi di $\mathbf{Z}$. Una biezione è data da

$$\text{"classe di } (n, m)\text{"} \quad \mapsto \quad n - m.$$

Esercizio 5.8. Sia $A = \{k \in \mathbb{Z} : 1 \leq k \leq 1000\}$. Sia R la relazione su A data da: "n è in relazione con m se e soltanto se n e m hanno lo stesso numero ci cifre".

(a) Dimostrare che R è una relazione di equivalenza.

(b) Quante classi di equivalenza ci sono? (a) Ogni numero ha lo stesso numero di cifre di se

stesso. Se n ha lo stesso numero di cifre di m, allora m ha lo stesso numero di cifre di n. Se n ha lo stesso numero di cifre di m e m ha lo stesso numero di cifre di k anche n ha lo stesso numero di cifre di k. La relazione è dunque riflessiva, simmetrica e transitiva. Si tratta quindi di una relazione di equivalenza.

(b) Due numeri stanno nella stessa classe se solo se hanno lo stesso numero di cifre. Una classe consiste dei numeri di k cifre. Siccome 1000 ha 4 cifre, abbiamo che $1 \leq k \leq 4$. Ci sono quindi 4 classi di equivalenza.

Esercizio 5.9. Sia $X = \{n \in \mathbb{Z} : 1 \leq n \leq 34\}$ e sia R la relazione su X definita nel modo seguente: nRm se e solo se n e m hanno lo stesso numero di cifre in base 2 (cioè se le rappresentazioni in base 2 di n e m hanno la stessa lunghezza).

(a) Stabilire se R è una relazione di equivalenza;

(b) In caso affermativo, determinare quante sono le classi di equivalenza e descriverle.

Ogni numero ha lo stesso numero di cifre che se stesso. Se n e m hanno lo stesso numero di cifre, vale anche il viceversa. Se m ha lo stesso numero di cifre di n e n ha lo stesso numero di cifre di p, allora m ha lo stesso numero di cifre di p. In conclusione: R è una relazione di equivalenza. Le classi di equivalenza sono i sottoinsiemi di X che consistono degli n che hanno lo stesso numero di cifre. Siccome 34 è uguale a 100001 in base 2, il numero di cifre dei numeri $n \in X$ varia fra 1 e 6. Ci sono quindi 6 classi di equivalenza.

Esercizio 5.10. *Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme della parti di X. Si definisca la seguente relazione sull'insieme $\mathcal{P}(X)$: dati due sottoinsiemi $A, B \subset X$, si ha che $A\,\mathbf{R}\,B$ se e solo se $A \cap B \neq \emptyset$. Determinare se $\mathbf{R}$ è: (a) riflessiva, (b) simmetrica, (c) antisimmetrica, (d) transitiva.* (a) La relazione non è riflessiva: per $A = \emptyset$ non vale $A\mathbf{R}A$. (invece, per ogni $A \neq \emptyset$

vale $A\mathbf{R}A$ in quanto $A \cap A = A \neq \emptyset$).

(b) La relazione è simmetrica: $A\mathbf{R}B$ implica $B\mathbf{R}A$, in quanto $A \cap B = B \cap A$ e dunque $A \cap B \neq \emptyset$ implica $B \cap A \neq \emptyset$.

(c) La relazione non è antisimmetrica: $A\mathbf{R}B$ e $B\mathbf{R}A$ non implica $A = B$, in quanto $A \cap B \neq \emptyset$ non implica $A = B$.

(d) La relazione non è transitiva: $A\mathbf{R}B$ e $B\mathbf{R}C$ non implica $A\mathbf{R}C$. In generale esistono infatti insiemi A, B, C con $A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, ma con $A \cap C = \emptyset$. (ad esempio $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$).

(Nel caso in cui X ha un elemento solo, la relazione è sia antisimmetrica che transitiva).

Esercizio 5.11. *Sia A l'insieme dei numeri naturali maggiori o uguali a 2. Si consideri la relazione su A definita come segue: dati $a, b \in A$, si ha che aRb se e solo se $mcd(a, b) > 1$. (a) Stabilire, dimostrandole o mostrando un controesempio, se R gode delle seguenti proprietà: riflessività, simmetria, antisimmetria, transitività. (b) Determinare l'insieme di tutti gli elementi in relazione con 18.* (a) R è riflessiva: per ogni $a > 1$, vale $mcd(a, a) = a > 1$;

(b) R è simmetrica: per ogni $a, b > 1$, vale $mcd(a, b) = mcd(b, a) > 1$;

(c) R non è antisimmetrica: $mcd(a, b) > 1$ e $mcd(b, a) > 1$ non implica $a = b$ (vedi (b) $\ldots$);

(d) R non è transitiva: $mcd(a, b) > 1$ e $mcd(b, c) > 1$ non implica $mcd(a, c) > 1$. Basta prendere ad esempio $a = 2$, $b = 6$, $c = 15$.

Esercizio 5.12. *Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi. Considerare la relazione su $\mathbb{Z}$ definita da "$m\mathbf{R}n$ se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $m + n = 4k$". Determinare se $\mathbf{R}$ è riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva.*

$\mathbf{R}$ non è riflessiva: solo i numeri pari sono in relazione con se stessi. Infatti $m\mathbf{R}m$ implica che esiste $k \in \mathbb{Z}$ con $2m = 4k$, ossia $m = 2k$. Dunque m deve essere pari.

$\mathbf{R}$ è simmetrica: $m\mathbf{R}n$ implica $n\mathbf{R}m$. Infatti se esiste $k \in \mathbb{Z}$ con $m+n = 4k$, anche $n+m = 4k$, per lo stesso intero $k \in \mathbb{Z}$.

$\mathbf{R}$ non è antisimmetrica: $m\mathbf{R}n$ ed $n\mathbf{R}m$ non implica $m = n$. Infatti, due qualunque multipli distinti di 4, ad esempio $m = 4$ ed $n = 12$, soddisfano $m\mathbf{R}n$ ed $n\mathbf{R}m$.

$\mathbf{R}$ non è transitiva: $m\mathbf{R}n$ ed $n\mathbf{R}p$ non implica $m\mathbf{R}p$. Infatti, per $m = 3$, $n = 1$, $p = 3$, troviamo $m + n = 3 + 1 = 4$, $n + p = 1 + 3 = 4$, ma $m + p = 3 + 3 = 6$ non è un multiplo di 4.

Esercizio 5.13. *Sia A un insieme. Si definisca la seguente relazione su $\mathcal{P}(A)$: $U\,R\,W$ se e solo se $|U| = |W|$ oppure $|U| = |W^c|$ (si ricorda che $|U|$ denota la cardinalità di U e W^c denota l'insieme $\{a \in A \mid a \notin W\}$).*

(a) Stabilire se R è una relazione di equivalenza.

(b) In caso affermativo, stabilire quante sono le classi di equivalenza di $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\})$ rispetto alla relazione R (motivare la risposta).

(a) R è riflessiva, ossia $U\ R\ U$, $\forall U \in \mathcal{P}(A)$, in quanto $|U| = |U|$, $\forall U \in \mathcal{P}(A)$.

R è simmetrica, ossia se $U\ R\ W$ allora $W\ R\ U$: infatti se $|U| = |W|$ anche $|W| = |U|$; similmente, se $|U| = |W^c|$, allora $|W| = |U^c|$.

R è transitiva, ossia se $U\ R\ W$ e $W\ R\ T$, allora $U\ R\ T$: infatti si ha che

$$\begin{array}{lcl}
|U| = |W|,\ |W| = |T| & \Rightarrow & |U| = |T| \\
|U| = |W^c|,\ |W| = |T| \Rightarrow |U| = |W^c| \text{ e } |W^c| = |T^c| & \Rightarrow & |U| = |T^c| \\
|U| = |W|,\ |W| = |T^c| & \Rightarrow & |U| = |T^c| \\
|U| = |W^c|,\ |W| = |T^c| \Rightarrow |U| = |W^c| \text{ e } |W^c| = |T| & \Rightarrow & |U| = |T|.
\end{array}$$

(b) Poiché dato $U \in \mathcal{P}(A)$, vale $|U^c| = 10 - |U|$, due sottoinsiemi $U, W \in \mathcal{P}(A)$ sono in relazione se e solo se $|U| = |W|$ oppure $|U| = 10 - |W|$. Ne segue che le classi di equivalenza sono 6 e sono costituite rispettivamente dai sottoinsiemi di cardinalità $0, 1, 2, 3, 4, 5$.