1
FORME MINIMALI DI UNA FUNZIONE POLINOMIALE

Notazione 1.1. In questa sezione, invece di $x \vee y$ scriveremo $x+y$, e, invece di $x \wedge y$ scriveremo xy.

Abbiamo visto che una funzione polinomiale booleana è univocamente descritta dalla sua forma normale disgiuntiva. Essa ha però lo svantaggio di essere la più "lunga" espressione della funzione come somma di prodotti. In questa sezione di occupiamo invece delle espressioni *minimali*, cioè le espressioni più corte possibili. In breve, data una somma di prodotti f, si denota E_f il numero ottenuto come somma dei numeri delle variabili che appaiono in ciascun prodotto. Inoltre si denota F_f il numero dei prodotti che appaiono in f. Ad esempio in

$$f(x,y,z) = xy + xy'z + z$$

si ha che $E_f = 2+3+1 = 6$ e che $F_f = 3$.

Definizione 1.2. Date due somme di prodotti *equivalenti*, f e g, si dice che f è *più semplice* di g se $E_f \leq E_g$ e $F_f \leq F_g$ e almeno una delle due disuguaglianze è stretta.
Una somma di prodotti si dice *minimale* se non vi sono somme di prodotti *più semplici* equivalenti ad essa.

Vedremo più avanti che le somme di prodotti minimali possono non essere uniche, cioè che possono esservi due o più somme di prodotti minimali equivalenti tra loro.

Ci occupiamo adesso di come, data una somma di prodotti, si può trovare in pratica una somma di prodotti minimale equivalente ad essa. Nel fare questo troveremo un altro tipo di somma di prodotti che determina univocamente una funzione: *la somma degli implicanti primi.*

Definizione 1.3. Date due somme di prodotti p e q si dice che p *implica* q se, considerando le funzioni polinomiali associate $\bar{p}_{\mathbb{B}}, \bar{q}_{\mathbb{B}} : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, si ha che se $\bar{p}_{\mathbb{B}}(b_1,..,b_n) = 1$ allora anche $\bar{q}_{\mathbb{B}}(b_1,...,b_n) = 1$.

Osservazione 1.4. Si ha che p implica q se e solo se $p+q \sim q$. Infatti $p+q \sim q$ significa che, nell'algebra di Boole delle funzione booleane $F_n(\mathbb{B})$, si ha che $\bar{p}_{\mathbb{B}}\, R\, \bar{q}_{\mathbb{B}}$ (dove R è la relazione d'ordine della struttura di reticolo su $F_n(\mathbb{B})$). D'altra parte è facile vedere che la relazione d'ordine R è proprio definita così: $\bar{p}_{\mathbb{B}}\, R\, \bar{q}_{\mathbb{B}}$ se se solo se si ha che se $\bar{p}_{\mathbb{B}}(b_1,..,b_n) = 1$ allora anche $\bar{q}_{\mathbb{B}}(b_1,...,b_n) = 1$. In particolare, si ha che $p \sim q$ se e solo se p implica q e q implica p.

Definizione 1.5. Sia p un prodotto e f una somma di prodotti. Allora p è un implicante primo di f se p implica f, ma ogni prodotto ottenuto da p cancellando una variabile non implica f.

Proposizione 1. *Ogni somma di prodotti è equivalente alla somma di tutti i suoi implicanti primi.*

Proof. Sia f una somma di prodotti e sia $q = \sum_{i=1}^{k} p_i$ la somma di tutti gli implicanti primi di f. Allora $q + f \sim \sum_{i=1}^{k} p_i + f \sim \sum_{i=1}^{k-1} p_i + f \sim ... \sim f$. Quindi q implica f (vedi l'Osservazione precedente).
La dimostrazione del viceversa, cioè che f implica q, è leggermente più complicata, e mi limito ad illustrarla con un esempio. Supponiamo che $\bar{f}_{\mathbb{B}}(1,0,1,1,1,0) = 1$. Sia $p = p(x_1,..,x_6) =$

$x_1x_2'x_3x_4x_5x_6'$. Se, ad esempio, anche $\bar{f}_{\mathbb{B}}(1,1,1,1,1,0)$ è uguale a 1, allora togliamo x_2' da p, e otteniamo $x_1x_3x_4x_5x_6'$. Allo stesso modo se, ad esempio, anche $f_{\mathbb{B}}(1,0,0,1,1,0)$ è uguale a 1, allora cancelliamo anche x_3 da p, ottenendo $x_1x_4x_5x_6'$. Procedendo in questo modo fino a quando è possibile, otteniamo un prodotto r che è un implicante primo di f, perché, per costruzione, r non implicherebbe più f se un'altra variabile fosse cancellata. Ma $r(1,0,1,1,1,0)=1$. Quindi anche $q(1,0,1,1,1,0)=1$ (ricordiamo che q denota la somma di tutti gli implicanti primi). □

Ora, diciamo che una somma di implicanti primi di f (non di tutti), equivalente a f è *irridondante* se ha il più piccolo numero possibile di prodotti.

Corollario 1.6. Una somma di prodotti minimale equivalente a f è necessariamente una somma di implicanti primi irridondante.

Proof. Sappiamo che f è equivalente alla somma di tutti i suoi implicanti primi. Poichè, per definizione di implicante primo, non possiamo togliere nessuna variabile ai vari prodotti, l'unica possibilità è togliere i prodotti stessi, fino ad arrivare ad una forma minimale. □

Per arrivare alla somma di *tutti gli implicanti primi* si può usare il metodo seguente (detto metodo *del consenso*): se due prodotti sono della forma $p=\alpha x_k$ e $q=\beta x_k'$, per un'*unica* variabile x_k, allora

$$p+q+\alpha\beta \sim p+q$$

In altre parole, $p+q$ è un implicante di $p+q+\alpha\beta$, cioè, aggiungendo $\alpha\beta$ a $p+q$ si ottiene una somma di prodotti equivalente. Infatti $p+q+\alpha\beta = \alpha x_k+\beta x_k'+\alpha\beta \sim \alpha x_k+\beta x_k'+\alpha\beta(x_k+x_k') \sim \alpha x_k+\beta x_k'+\alpha\beta x_k+\alpha\beta x_k'$. Per l'assorbimento, l'ultima funzione è equivalente a $\alpha x_k+\beta x_k' = p+q$. Si dice che $\alpha\beta$ è detto il *consenso* di p e q.
Dunque l'algoritmo funziona così:
1) si comincia da una somma di prodotti irridondante f;
2) si trovano, se ci sono, due prodotti alla cui somma si può aggiungere il loro consenso.
1) usando l'assorbimento, si eliminano eventualmente prodotti per arrivare ad una somma di prodotti irridondante;
2) si cercano altri due prodotti a cui aggiungere il loro consenso (purché tale consenso non contenga uno degli altri prodotti fondamentali).
Ripetendo il processo, alla fine di arriva ad un punto in cui né 1) né 2) possono essere più applicati. Si può dimostrare che quello a cui si arrivati è la somma di *tutti gli implicanti primi di f.*

Esempio 1.7. $f(x,y,z) \sim xyz + x'z' + xyz' + x'y'z + x'yz'$.

$$\begin{aligned} f &\overset{ass}{\sim} xyz + x'z' + xyz' + x'y'z \sim \\ &\overset{cons}{\sim} xyz + x'z' + xyz' + x'y'z + xy \sim \\ &\overset{ass}{\sim} x'z' + x'y'z + xy \\ &\overset{cons}{\sim} x'z' + x'y'z + xy + x'y' \sim \\ &\overset{ass}{\sim} x'z' + xy + x'y' \sim \\ &\overset{cons}{\sim} x'z' + xy + x'y' + yz' \end{aligned}$$

A questo punto nessun altro passo può cambiare l'espressione trovata per f. Quindi questa è la somma di *tutti* gli implicanti primi.

Per trovare un'espressione minimale, si eliminano gli implicanti primi "superflui", che possono essere individuati tramite la forma normale disgiuntiva. Si noti che questi implicanti primi "superflui" non sono necessariamente unici. Quindi l'espressione minimale non è necessariamente unica.

Esempio 1.8. Continuiamo con l'esempio precedente. Abbiamo la somma di tutti gli implicanti primi

$$x'z' + xy + x'y' + yz'$$

Esprimendo ciascun implicante primo come una somma di prodotti *completa* otteniamo

$$x'z' \sim x'z'(y + y') \sim x'yz' + x'y'z'$$

Allo stesso modo

$$xy \sim xyz + xyz'$$
$$x'y' \sim x'y'z + x'y'z'$$
$$yz' \sim xyz' + x'yz'$$

Si vede che i prodotti di

$$x'z'$$

cioè $x'yz'$ e $x'y'z'$ compaiono negli altri prodotti. Quindi $x'z'$ è "superfluo" e può essere cancellato.

Esercizio 1.9. Siano:
(a) $f(x, y, z) = xy' + xyz' + x'yz'$
(b) $g(x, y, z, t) = xy + y't + x'yz' + xy'zt'$.
Determinare tutti gli implicanti primi di f e g e una loro espressione minimale.