GENERALITÀ SULLE FUNZIONI. CARDINALITÀ

1. Definizione di funzione

Definizione 1.1. Siano X e Y due insiemi. Una *funzione* f *da* X *a* Y è un sottoinsieme del prodotto cartesiano:

$$f \subseteq A \times B,$$

tale che $\forall x \in X$ esiste ed è unico $y \in Y$ tale che $(x, y) \in f$. In tal caso, dato $x \in X$, l'unico $y \in Y$ tale che $(x, y) \in f$ si denota $f(x)$. Inoltre l'insieme X si chiama *insieme di partenza* o *dominio* di f, e l'insieme Y si chiama *insieme di arrivo* o *codominio* di f, e si usa la seguente notazione: $f : A \to B$.

Osservazioni 1.2. Si noti che le funzioni sono particolari *relazioni* (vedi in seguito il Capitolo sulle Relazioni).

Esempio 1.3. In questa terminologia, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, è il sottoinsieme

$$f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Essa è *diversa* dalla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^2$. La differenza è che, anche se la "legge che definisce la funzione" è la stessa, l'insieme di arrivo è diverso: prima era $\mathbb{R}$ e adesso è $\mathbb{R}^{\geq 0}$ (numeri reali non negativi).

Esempio/Esercizio 1.4. Il sottoinsieme $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\} \subset \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ è una funzione da $\{1, 2, 3\}$ a $\{1, 2, 3\}$. Si ha che $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ e $f(3) = 3$.
Invece il sottoinsieme $\{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)\} \subset \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ *non* è una funzione da $\{1, 2, 3\}$ a $\{1, 2, 3\}$. Perchè?
Il sottoinsieme $g = \{(1, 2), (3, 3)\} \subset \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ *non* è una funzione da $\{1, 2, 3\}$ a $\{1, 2, 3\}$. Perchè?
Il sottoinsieme $h = \{(1, 2), (3, 3)\} \subset \{1, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ *è* una funzione da $\{1, 3\}$ a $\{1, 2, 3\}$. Perchè? Scrivere esplicitamente le immagini di tutti gli elementi del dominio.

2. Iniettività, suriettività, biettività

Definizione 2.1. *(Funzione iniettiva)* Una funzione $f : X \to Y$ si dice iniettiva se, per ogni $x_1, x_2 \in X$ tali che $x_1 \neq x_2$, si ha che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definizione 2.2. *(Funzione suriettiva)* Una funzione $f : X \to Y$ si dice suriettiva se, per ogni $y \in Y$, esiste un $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

Definizione 2.3. *(Funzione biettiva)* Una funzione $f : X \to Y$ si dice biettiva se è iniettiva e suriettiva. In altre parole, se per ogni $y \in Y$ esiste ed è unico un $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

Definizione 2.4. *(Insieme immagine)* Data una funzione $f : X \to Y$, l'immagine di f è il seguente sottoinsieme di Y:

$$Im(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ tale che } f(x) = y\}.$$

Definizione 2.5. *(Insieme controimmagine di un elemento)* Data una funzione $f : X \to Y$ e un elemento $y \in Y$, la controimmagine di y (secondo la f) è il seguente sottoinsieme di X, denotato $f^{-1}(y)$:
$$f^{-1}(y) = \{x \in \mid f(x) = y\}.$$

Esempi 2.6. (a) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = x^2$ non è iniettiva (dato $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, vale $f(x) = f(-x)$. Non è suriettiva (se $y < 0$ allora non esiste nessun $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = y$).
Se $y > 0$, allora $f^{-1}(y) = \{y, -y\}$. Inoltre $f^{-1}(0) = \{0\}$.

(b) La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita da $f(n) = n^2$ è iniettiva (se $n, m \in \mathbb{N}$ e $n^2 = m^2$ allora $n = m$). Non è suriettiva (l'immagine di f consiste nei numeri che sono quadrati di un numero naturale $1, 4, 9, 16, ...$).

(c) la funzione $f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3\}$ definita da $f(a) = 3$, $f(b) = 1$, $f(c) = 3$, $f(d) = 1$ non è iniettiva, perchè $f(b) = f(d)$. È suriettiva, perchè ogni elemento di $\{1, 2, 3\}$ "proviene", tramite la f, da almeno un elemento di $\{a, b, c, d\}$.

Osservazioni 2.7. (a) Sia $f : X \to Y$ una funzione. Allora f è suriettiva se e solo se $Im(f) = Y$.

(b) Sia $f : X \to Y$ una funzione. Allora f è suriettiva se e solo se $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, $\forall y \in Y$.

(c) Sia $f : X \to Y$ una funzione. Allora f è iniettiva se e solo se, $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ ha al più un elemento.

(d) Sia $f : X \to Y$ una funzione. Allora f è biettiva se e solo se, $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ consiste di esattamente un elemento.

Osservazioni/Esercizio 2.8. Siano X e Y insiemi *finiti* (cioè con un numero finito di elementi). Si indichi con $|X|$ (risp. $|Y|$) il numero degli elementi di X (risp. Y). Dimostrare che:
(a) Sia $f : X \to Y$ una funzione. Se f è iniettiva allora $|X| \leq |Y|$.
(b) Sia $f : X \to Y$ una funzione. Se f è suriettiva, allora $|X| \geq |Y|$.
(c) Sia $f : X \to Y$ una funzione. Se f è biettiva, allora $|X| = |Y|$.
(d) Se $|X| = |Y|$, f è iniettiva se e solo se f è suriettiva.

3. Composizione di funzioni. Invertibilità

Definizione 3.1 (Composizione di funzioni)**.** Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funzioni. Allora la composizione delle funzioni f e g è la funzione (denotata $g \circ f$, oppure semplicemente gf) $g \circ f : X \to X$, definita da $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Proposizione 3.2 (Associatività della composizione di funzioni)**.** Siano $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to T$ funzioni. Allora $h \circ (g \circ f) = (g \circ h) \circ f$.

Proof. $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g(f(x)) = h((g(f(x)))$. $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$. □

Notazione 3.3 (Funzione identità))**.** Dato un insieme X, la funzione da X a X, definita da $x \mapsto x$ si chiama funzione identità dell'insieme X e si denota id_X.

Definizione/Proposizione 3.4 (Funzione invertibile, Funzione inversa)**.** Sia $f : X \to Y$ una funzione. Allora f si dice invertibile se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$ (in altre parole, se $g(f(x)) = x$, $\forall x \in X$ e se $f(g(y)) = y$, $\forall y \in Y$). In tal caso, la funzione g è unica, si chiama la funzione inversa di f, e si denota f^{-1}.

Proof. Dobbiamo dimostrare l'unicità. Sia $h : Y \to X$ un'altra funzione tale che $h \circ f = id_X$ e $g \circ h = id_Y$. Consideriamo un qualsiasi $y \in Y$. Allora, per ipotesi, $y = f(g(y))$. Dunque $h(y) = h(f(g(y))) = id_X(g(y)) = g(y)$ (si noti che abbiamo usato l'associatività della composizione di funzioni). Abbiamo dimostrato che $h(y) = g(y)$, $\forall y \in Y$. Dunque $g = h$. □

Esercizio 3.5. Dimostrare che, se f è invertibile, allora anche f^{-1} lo è, e che $(f^{-1})^{-1} = f$.

Proposizione 3.6 (Invertibilità=biettività)**.** Sia $f : X \to Y$ una funzione. Allora f è invertibile se e solo se f è biettiva.

Proof. $\Rightarrow$. Supponiamo f invertibile. Sia $y \in Y$. Allora $y = f(f^{-1}(y)) = f(x)$, dove $x = f^{-1}(y)$. Dunque $y \in Im(f)$ $\forall y \in Y$. Quindi f è suriettiva.
Siano $x_1 \in X$ e $x_2 \in X$. Se $f(x_1) = f(x_2)$, allora $x_2 = f^{-1}(f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1) = x_1$. Quindi f è iniettiva.

$\Leftarrow$. Supponiamo f biettiva. Sia $y \in Y$. Per ipotesi, esiste (per la suriettività) ed è unico (per l'iniettività) un $x_y \in X$ tale che $f(x_y) = y$. Definiamo la funzione $g : Y \to X$ così: $g(y) = x_y$. Si verifica facilmente che g è inversa di f. □

Osservazioni 3.7. Si noti che, nel caso f sia invertibile, dato $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ denota sia la controimmagine di y, cioè l'insieme $\{x \in X \mid f(x) = y\}$, sia il valore della funzione inversa di f applicata ad y. Le due cose coincidono, perchè la controimmagine di y è l'insieme il cui unico elemento è proprio il valore della funzione inversa, applicata ad y.

Esempi 3.8. (a) La funzione $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^2$, è biettiva. Questo può essere verificato mostrando separatemente che f è iniettiva e suriettiva, oppure direttamente mostrando che f ha un'inversa. In questo caso l'inversa è $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.
(b) La funzione $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ definita da $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$ è biettiva. L'inversa è $f^{-1}(1) = 4$, $f^{-1}(2) = 1$, $f^{-1}(3) = 3$, $f^{-1}(4) = 2$.

4. Insiemi di funzioni i cui insiemi di partenza (dominio) e di arrivo (codominio) sono finiti

Dato un insieme *finito* A, il numero dei suoi elementi si denota $|A|$. Dati due insiemi A e B, denotiamo con
$$F(A, B) = \{f \mid f : A \to B \text{ é una funzione}\},$$
l'insieme della funzioni da A a B. In questa sezione ci occupiamo del numero di elementi di $F(A, B)$ e di alcuni altri che hanno a che fare con $F(A, B)$, sotto l'ipotesi che A e B siano insiemi *finiti.*

Proposizione 4.1. Se A e B sono insiemi finiti, allora $|F(A, B)| = |B|^{|A|}$

Proof. Sia $A = \{a_1, .., a_n\}$ e $B = \{b_1, .., b_m\}$. Dare una funzione $f : A \to B$ significa dare una n-upla ordinata $(f(a_1), ..., f(a_n))$, dove gli $f(a_i)$ possono assumere qualsiasi valore in B. É quindi chiaro che c'è una funzione biettiva (o corrispondenza biunivoca, come si diceva un tempo) tra $F(A, B)$ e $B \times \cdots \times B$ (n volte). Dunque il numero di elementi di $F(A, B)$ è uguale al numero di elementi di $B \times \cdots B$ (n volte), cioè m^n, cioè $|B|^{|A|}$ □

Proposizione 4.2. Sia A un insieme finito. Allora l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ è finito, e $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Proof. Sia $A = \{a_1, .., a_n\}$. Un sottoinsieme $B \subseteq A$ può essere descritto dicendo se $a_i \in A$ oppure $a_i \notin A$, per ogni $i = 1, .., n$. In altre parole, dato $B \in \mathcal{P}(A)$, consideriamo la funzione $f_B : A \to \{0, 1\}$ così definita: $f(a_i) = 1$ se $a_i \in B$ e $f(a_i) = 0$ se $a_i \notin B$. Abbiamo quindi una funzione

$$F : \mathcal{P}(A) \to F(A, \{0, 1\}), \qquad \text{definita da} \qquad F(B) = f_B.$$

Si ha che F è biettiva: l'inversa di F è la funzione

$$G : F(A, \{0, 1\}) \to \mathcal{P}(A) \qquad \text{definita da} \qquad G(f) = f^{-1}(1)$$

(in parole più povere, G associa alla funzione $f : A \to \{0, 1\}$ il sottoisieme B di A i cui elementi sono tutti gli $a_i \in A$ tali che $f(a_i) = 1$).
Poichè F è biettiva, $|\mathcal{P}(A)|$ è uguale a $|F(A, \{0, 1\})|$ che, per la proposizione precedente, è uguale a $2^{|A|}$. □

Esercizio 4.3. Nella dimostrazione precedente, dimostrare che G è la funzione inversa di F.

Esempi 4.4. (a) Se $|A| = 0$, cioè $A = \emptyset$, allora l'unico sottoinsieme di A è A stesso, cioè $\emptyset$. Dunque $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$.
(b) Se $|A| = 1$, ad esempio $A = \{a\}$, i sottoinsiemi di A sono: $\emptyset$ e A. Dunque $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$. Dunque $|\mathcal{P}(\{a\})| = 2 = 2^1$.
(c) Se $|A| = 2$, ad esempio $A = \{a, b\}$, si ha che $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Dunque $|\mathcal{P}(\{a, b\})| = 4 = 2^2$.

Proposizione 4.5. Se A e B sono insiemi finiti, con $|A| = n$ e $|B| = m$ (dove $n \leq m$) allora il numero di funzioni iniettive da A a B è: $m(m-1)\cdots(m-n+1)$.

Proof. Continuiamo con le notazioni della Proposizione 4.1. Una funzione $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se la n-upla ordinata $(f(a_1), ..., f(a_n))$ che la descrive verifica le seguenti proprietà: $f(a_2) \neq f(a_1)$; $f(a_3) \neq f(a_1), f(a_2)$; .....; $f(a_n) \neq f(a_1), ..., f(a_{n-1})$.
Quindi, per $f(a_1)$ abbiamo $|B| = m$ possibilità. Una volta che abbiamo stabilito chi è $f(a_1)$, $f(a_2)$ può assumere ogni valore in B, eccetto $f(a_1)$. Quindi per $f(a_2)$ ci sono $m - 1$ possibilità. Per lo stesso motivo, una volta stabilito chi sono $f(a_1)$ e $f(a_2)$, per $f(a_3)$ ci sono $m-2$ possibilità, e così via fino a $f(a_n)$, che ha $n-m+1$ possibilità. In conclusione, le n-uple ordinate di elementi di B che corrispondono a funzioni iniettive sono $n(n-1)....(n-m+1)$. □

Corollario 4.6. Siano A e B due insiemi finiti, tali che $|A| = |B| = n$. Allora il numero di funzioni biettive da A a B è $n!$.

Proof. È un caso particolare della Proposizione precedente, perchè se $|A| = |B|$, allora $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se è biettiva (Vedi Osservazione/Esercizio successivo). Quindi il numero di funzioni biettive da A a B è: $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ cioè $n!$. □

Osservazioni/Esercizio 4.7. Se A e B sono insiemi finiti, e $|A| = |B|$, allora una funzione $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se è suriettiva, e quindi se e solo se è biettiva.

Definizione 4.8. Sia A un insieme finito. Una funzione biettiva $F : A \to A$ è detta anche una permutazione di A.

5. Cardinalità. Cardinalità numerabile.

Dati due insiemi *finiti* sappiamo dire con certezza se il numero di elementi del primo è maggiore, minore o uguale al numero di elemnti del secondo. Ma se un insieme è infinito? Come possiamo definire il *numero dei suoi elementi*? Non possiamo farlo. Però invece di definire il numero degli elementi di un insieme, possiamo ragionevolmente definire, anche per insiemi infiniti, l'analogo del fatto che *"due insiemi hanno stesso numero di elementi"*. Questo si fa tramite la seguente

Definizione 5.1 (Avere la stessa cardinalità)**.** Si dice che due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità se esiste una funzione biettiva $f : A \to B$.

È chiaro che, se A è finito, allora B ha la stessa cardinalità di A se e solo se B è finito e $|A| = |B|$. Per questo motivo, se A è finito, il numero $|A|$ è detto anche la *cardinalità* di A.

Se abbiamo a che fare con insiemi infiniti, la nozione di cardinalità è meno intuitiva e più sottile. Ad esempio, può benissimo capitare che ci sia un sottoinsieme *proprio* A di B tale che A e B hanno stessa cardinalità.

Esempio 5.2. Denotiamo con $2\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali *pari*. Si ha che $\mathbb{N}$ e $2\mathbb{N}$ hanno la stessa cardinalità. Infatto la funzione $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$, è iniettiva e suriettiva.

Esempio 5.3. $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno stessa cardinalità. Per mostrare ciò, è sufficiente mostrare una funzione biettiva tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Sia ad esempio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ così definita: $f(n) = \frac{n}{2}$ se n è pari e $f(n) = -\frac{n-1}{2}$ se n è dispari. Si ha che f è biettiva. Infatti si può verificare che f è iniettiva e suriettiva (a tale proposito, si osservi che, le immagini dei numeri pari sono i numeri positivi: 1,2,3,... mentre le immagini dei numeri dispari sono i numeri negativi: 0, -1, -2,...). Quindi f è suriettiva. Verificare l'iniettività per esercizio. Oppure si può verificare che la funzione $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ così definita: $g(a) = 2a$ se $a > 0$, e $g(a) = -(2a - 1)$ se $a \leq 0$ è l'inversa di f (altro esercizio).

Esempio/Esercizio 5.4. Segue dai due esempi precedenti che $2\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno la stessa cardinalità. Esibire esplicitamente una funzione biettiva $f : 2\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ e la sua inversa. (suggerimento: comporre opportunamente le funzioni degli esempi precedenti).

Ecco una definizione importante

Definizione 5.5. *(Insieme numerabile)* Un insieme A si dice numerabile se ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$. In altre parole, se esiste una funzione biettiva $f : \mathbb{N} \to A$.

Il motivo della terminologia *"numerabile"* è che il dare una funzione biettiva $f : \mathbb{N} \to A$ è la stessa cosa che "enumerare" gli elementi di A, ponendo $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$,..., $a_n = f(n)$....

Negli esempi precedente abbiamo visto che $2\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ sono numerabili.

Proposizione 5.6. Un sottoinsieme di un insieme numerabile è finito o numerabile.

Proof. Sia A un insieme numerabile. Usando una funzione biettiva $f : \mathbb{N} \to A$, possiamo identificare A a $\mathbb{N}$, e quindi che supporre che $A = \mathbb{N}$. Sia dunque B un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, e supponiamo che B non sia finito. Definiamo ricorsivamente[1] $g : \mathbb{N} \to B$ come segue: $g(1) = min\,(B)$, $g(2) = min\,(B - \{g(1)\})$, $g(3) = min\,(B - \{g(1), g(2)\})$, ...,$g(n) = min\,(B - \{g(1), ..., g(n-1)\})$. Si verifica che g è biettiva. □

Esercizio 5.7. Dimostrare che, nella dimostrazione precedente, la funzione g è biettiva.

Proposizione 5.8. Se A è numerabile e B è finito o numerabile allora $A \cup B$ è numerabile.

[1]una funzione g il cui dominio è $\mathbb{N}$ (o un sottoinsieme di $\mathbb{N}$) si dice *definita ricorsivamente* se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la definizione dell'immagine di n, cioè $g(n)$, utilizza la defінzione dell'immagine dei numeri precedenti n, cioè la definizione di $g(1)$,...,$g(n-1)$

Proof. Supponiamo che anche B sia numerabile (il caso B finito è ancora più facile). Supponiamo di avere già enumerato A e B tramite due funzioni $f : \mathbb{N} \to A$ e $g : \mathbb{N} \to B$. Dunque possiamo scrivere $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ..\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_m, ...\}$. Supponiamo inoltre che A e B siano disgiunti (ogni elemento di A è diverso da ogni elemento di B). Adesso per enumerare $A \cup B$ non dobbiamo fare altro che mettere "B sopra A e enumerarli "in diagonale":

$$\begin{array}{cccccc} b_1 & b_2 & b_3 & .... & b_n & .... \\ a_1 & a_2 & a_3 & .... & a_n & .... \end{array}$$

Si definisce $h : \mathbb{N} \to A \cup B$ così: $h(1) = a_1$, $h(2) = b_1$, $h(3) = a_2$, $h(4) = b_2$, $h(5) = a_3$.... Per essere precisi: $h(n) = a_{(n+1)/2}$ se n è dispari, e $h(n) = b_{n/2}$ se n è pari.

Se poi A e B non sono disgiunti, ci si può ricondurre al caso precedente nel modo seguente. Sia $B' = B - (A \cap B)$. Allora A e B' sono evidentemente disgiunti (abbiamo tolto l'intersezione) e $A \cup B = A \cup B'$ (esercizio). □

Esercizio 5.9. Ridimostrare che $\mathbb{Z}$ è numerabile osservando che $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\leq 0} \cup \mathbb{N}$.

Esercizio 5.10. Dimostrare per induzione che se A_1 è numerabile e $A_2, .., A_n$ sono insiemi finiti o numerabili, allora $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ è numerabile.

Proposizione 5.11. Se A è numerabile e B è finito o numerabile, allora $A \times B$ è numerabile.

Proof. La dimostrazione è ancora basata sull'enumerazione "diagonale". Supponiamo che B sia numerabile, e supponiamo di avere già enumerato A e B, così da potere supporre, senza perdere in generalità, che $A = B = \mathbb{N}$. Dunque $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ può essere descritto come una "matrice infinita"

$$\begin{array}{cccccc} ... & ... & ... & .... & .... & .... \\ (m,1) & (m,2) & (m,3) & .... & (m,n) & .... \\ ... & ... & ... & .... & .... & .... \\ ... & ... & ... & .... & .... & .... \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & .... & (3,n) & .... \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & .... & (2,n) & .... \\ (1,1) & (1,2) & (1,3) & .... & (1,n) & .... \end{array}$$

Poniamo $f(1) = (1,1)$, $f(2) = (2,1)$, $f(3) = (1,2)$, $f(4) = (3,1)$, $f(5) = (2,2)$, $f(6) = (1,3)$, $f(7) = (4,1)$ e così via. È evidente che f è iniettiva e suriettiva. □

Esercizio 5.12. Dare una esplicita definizione ricorsiva della funzione f della dimsotrazione precedente.

Corollario 5.13. L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili (o finiti) è numerabile (o finita). In simboli: sia $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una famiglia , a indici in $\mathbb{N}$, di insiemi finiti o numerabili. Allora $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ è numerabile (o finito).

Proof. Segue dalla proposizione precedente osservando che, se gli A_i sono mutuamente disgiunti (cioè $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i, j \in \mathbb{N}$), e tutti numerabili, allora c'è una funzione biettiva tra $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Infatti, supponiamo di avere enumerato ciascuno degli A_i, in modo tale che possiamo scrivere $A_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,n}, ...\}$. Dunque $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{a_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$, e abbiamo la funzione biettiva $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ definita da $f(i, j) = a_{i,j}$.

Se invece qualche A_i è finito, ci si può ricondurre al caso precedente per mezzo della Proposizione 5.6, visto che ogni insieme finito è sottoinsieme di un insieme numerabile. Se, poi, gli A_i non sono mutuamente disgiunti, ci si può ancora ricondurre al caso precedente togliendo da ciascun A_i tutte le intersezioni $A_i \cap A_j$, $j \in \mathbb{N}$. In questo modo otterremo, per ogni $i \in \mathbb{N}$, una nuovo insieme $(A')^i$ in modo tale che $\cup_{i \in \mathbb{N}} A^i = \cup_{i \in \mathbb{N}} (A')^i$. Questa volta gli insiemo $(A')^i$ sono mutuamente disgiunti. □

Corollario 5.14. L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è numerabile.

Proof. Consideriamo il seguente sottoinsieme A di $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$:

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid a \text{ e } b \text{ non hanno fattori comuni }\}.$$

Abbiamo la biettività $f : A \to \mathbb{Q}$ definita da $f(a, b) = \frac{a}{b}$ (ogni numero razionale è univocamente descritto da una frazione in cui il denominatore è positivo e senza fattori comuni con il numeratore). Poichè $\mathbb{Z}$ è numerabile, allora $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ è numerabile (Prop. 5.11). Poichè A è un sottosinsieme (non finito) di $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, allora è numerabile (Proposizione 5.6). Dunque $\mathbb{Q}$ è numerabile. □

Osservazioni 5.15. È utile apprezzare con chiarezza il significato e la portata dei risultati precedenti. Le Prop. 5.6 e 5.11 sono utili per fare deduzioni qualitative importanti sulla cardinalità di certi insiemi. Ad esempio, possiamo dedurre che $\mathbb{Q}$ è numerabile (Cor. 5.14), o che l'unione numerabile di insiemi numerabili o finiti è numerabile (Cor. 5.13). Però, dato un insieme numerabile A, la questione di trovare una esplicita funzione biettiva $f : \mathbb{N} \to A$, o, dati due insieme numerabili A e B, il trovare una *esplicita* funzione biettiva $f : A \to B$, è un altro paio di maniche, dove le dimostrazioni delle sopracitate proposizioni non sempre sono d'aiuto. Ad esempio, malgrado il Cor. 5.14, trovare una esplicita enumerazione dei numeri razionali non è certo facile. In alcuni casi è conveniente ragionare direttamente, invece di cercare di tradurre in pratica le dimostrazioni delle proposizioni 5.6 e 5.11.

Esempio 5.16. Sia $a \in \mathbb{Z}$. Supponiamo di volere trovare una funzione biettiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} - \{a\}$. Sappiamo che una tale funzione c'è, perchè $\mathbb{Z}$ è numerabile e anche $\mathbb{Z} - \{a\}$, essendo un sottoinsieme (non finito) di $\mathbb{Z}$ lo è (Proposizione 5.6). Costruire una tale funzione è facile. Si vede $\mathbb{Z}$ come l'unione di due parti disgiunte: $\mathbb{Z}^{<a}$ e $\mathbb{Z}^{\geq a}$. Poi si manda $\mathbb{Z}^{<a}$ in se stesso, tramite l'identità , mentre si manda $\mathbb{Z}^{\geq a}$ in $\mathbb{Z}^{>a}$ tramite la funzione (chiaramente biettiva) $n \mapsto n + 1$. La funzione che risulta è: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} - \{a\}$ definita così: $f(n) = n$ se $n < a$ e $f(n) = n + 1$ se $n \geq a$.

Esercizio 5.17. (a) Siano $a < b$ due numeri interi. Imitare il metodo precedente per trovare una funzione biettiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^{\leq a} \cup \mathbb{Z}^{\geq b}$.
(b) Trovare una funzione biettiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^{\leq a} \cup \mathbb{Z}^{\geq b}$ e la sua inversa. (suggerimento: comporre con le funzioni biettive dell'esempio 5.3).

6. Insiemi di cardinalità maggiore del numerabile

L'insieme infinito di cardinalità non numerabile a noi più familiare è certamente l'insieme dei numeri reali.

Proposizione 6.1. $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Proof. Dimostriamo che l'intervallo aperto $(0,1)$ non è numerabile. La dimostrazione è per assurdo. Sappiamo che ogni numero reale $x \in (0,1)$ è univocamente determinato dalla sua *rappresentazione decimale*: $x = 0, d_1 d_2 .... d_k ....$. Supponiamo che l'insieme $(0,1)$ sia numerabile, e di averlo enumerato: $(0,1) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Avremo che

$$\begin{array}{llllllll}
x_1 & = 0 & , & d_{11} & d_{12} & d_{13} & ..... & d_{1n} & ..... \\
x_2 & = 0 & , & d_{21} & d_{22} & d_{23} & ..... & d_{2n} & ..... \\
x_3 & = 0 & , & d_{31} & d_{32} & d_{33} & ..... & d_{3n} & ..... \\
 & & & & & & & & \\
... & ... & & ... & ... & ..... & ... & ...... & \\
x_k & = 0 & , & d_{k1} & d_{k2} & d_{k3} & ..... & d_{kn} & ..... \\
 & & & & & & & & \\
... & ... & & ... & ... & ..... & ... & ...... &
\end{array}$$

Ora definiamo il seguente numero reale $x = 0, d_1 d_2 d_3 ..... d_n ....$ nel modo seguente:
$d_k = 1$ se $d_{kk} \neq 1$ e $d_k = 2$ se $d_{kk} = 1$.
È chiaro che $x \neq x_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Infatti la k-esima cifra della rappresentazione decimale di x (per essere precisi: d_k) è diversa dalla k-esima cifra della rappresentazione decimale di x_k (cioè d_{kk}). Dunque siamo arrivati ad una contraddizione. □

La cardinalità $\mathbb{R}$ è detta *cardinalità del continuo*.

Osservazioni 6.2. Ne segue che i numeri reali irrazionali sono *"molti di più"* dei numeri razionali. Più precisamente: mentre l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è numerabile, l'insieme dei numeri reali irrazionali Irr non lo è (si può dimostrare che ha la cardinalità del continuo). Infatti, se Irr fosse numerabile allora lo sarebbe anche $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup Irr$ (Prop. 5.8).

Esempio/Esercizio 6.3. Il prodotto cartesiano di due insiemi continui è continuo. Per vedere ciò, dimostriamo che l'insieme $(0,1)$ e l'insieme $(0,1) \times (0,1)$ hanno la stessa cardinalità esibendo una biettività tra essi. La funzione è definita nel modo seguente:

$$f\big((0, d_1 d_2 d_3 ..... d_n .... \;,\; 0, e_1 e_2 e_3 ..... e_n ....)\big) = (0, d_1 e_1 d_2 e_2 d_3 e_3 ..... d_n e_n ....)$$

Non è difficile verificare che si tratta di una funzione biettiva (esercizio).
Usando ciò, è facile dimostrare che $\mathbb{R}^n$ (insieme delle n-uple ordinate di numeri reali) è continuo, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio/Esercizio 6.4. Se ad un insieme continuo togliamo un punto, l'insieme ottenuto è ancora continuo. Per dimostrare ciò, esibiamo una esplicita biettività f tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} - \{0\}$. La f si può costruire nel modo seguente: abbiamo che $\mathbb{R} = (\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Z}$. Inoltre abbiamo che $\mathbb{R} - \{0\} = (\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} - \{0\})$. Ora, mandiamo $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ in se' stesso (tramite l'identità) e mandiamo biettivamente $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z} - \{0\}$ come nell'Esempio 5.16. A voi scrivere esplicitamente la funzione.

In realtà, dato un insieme X, c'e' sempre un insieme di cardinalità maggiore di X. Questo in virtù del seguente profondo Teorema (che non dimostriamo)

Teorema 1. *Dato un insieme X, esso non ha la stessa cardinalità del suo insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$.*

7. Raccolta di alcuni esercizi tratti da compiti d'esame su: funzioni e cardinalità.

Attenzione: questi sono alcuni esercizi d'esame, sugli argomenti di questa dispensa. Non sono una selezione di quelli che ritengo più significativi, ma solamente quelli tratti daglia appelli di cui sono in possesso del file sorgente. Siete quindi invitati a cercare di risolvere gli esercizi, su questi argomenti, tratti dai TUTTI gli esami degli anni passati (oltre agli esercizi assegati, naturalmente).

Esercizio 7.1. Sia X l'insieme dei numeri naturali pari. Esibire una funzione biettiva $f : \mathbf{Z} \to X$. La funzione $f : \mathbb{Z} \longrightarrow X$ definita da $f(k) = 4k$ per $k > 0$ e $f(k) = 2 - 4k$ per $k \leq 0$ è una biezione. Per dimostrare l'iniettività supponiamo che $f(k) = f(k')$. Ci sono due possibilità. Se $f(k) = f(k') \equiv 0 \pmod 4$, allora $4k = f(k) = f(k') = 4k'$ e quindi $k = k'$. Oppure $f(k) = f(k') \not\equiv 0 \pmod 4$ e quindi $4k + 2 = f(k) = (k') = 4k' + 2$ e quindi $k = k'$. Per dimostare la suriettività, sia $m \in X$ un numero pari. Se m è divisibile per 4 allora $f(m/4) = m$. Se no, allora $m \equiv 2 \pmod 4$ e $f(\frac{2-m}{4}) = m$.

Esercizio 7.2. Sia $\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $A = \{1, 4, 9, \ldots\}$ l'insieme dei quadrati di elementi di $\mathbf{N}$.

(a) Costruire una funzione $A \longrightarrow \mathbf{N}$ suriettiva.

(b) Costruire un'iniezione $\mathbf{N} \longrightarrow A$ che *non* è una biezione.

Notiamo prima che esistono *infinite* funzioni che hanno le proprietà richieste.
(a) Sia $f : A \longrightarrow \mathbf{N}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt{x}$. Allora f è suriettiva, poiché per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $x \in A$ (vale a dire $x = n^2$) con $f(x) = n$.
(b) Sia $g : \mathbf{N} \longrightarrow A$ la funzione definita da $g(n) = (n+1)^2$. Allora g è iniettiva. Infatti, se $g(n) = g(m)$, allora $(n+1)^2 = (m+1)^2$ e quindi $m = n$. Ma g non è suriettiva, poiché non esiste $n \in \mathbf{N}$ per cui $g(n) = (n+1)^2$ è uguale ad $1 \in A$.

Esercizio 7.3. Sia $\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $A = \{1, 4, 9, \ldots\}$ l'insieme dei quadrati di elementi di $\mathbf{N}$.

(a) Costruire una funzione $A \longrightarrow \mathbf{N}$ suriettiva.

(b) Costruire un'iniezione $\mathbf{N} \longrightarrow A$ che *non* è una biezione.

Notiamo prima che esistono *infinite* funzioni che hanno le proprietà richieste.
Sia $f : A \longrightarrow \mathbf{N}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt{x}$. Allora f è suriettiva, poiché per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $x \in A$ (vale a dire $x = n^2$) con $f(x) = n$.
Sia $g : \mathbf{N} \longrightarrow A$ la funzione definita da $g(n) = (n+1)^2$. Allora g è iniettiva. Infatti, se $g(n) = g(m)$, allora $(n+1)^2 = (m+1)^2$ e quindi $m = n$. Ma g non è suriettiva, poiché non esiste $n \in \mathbf{N}$ per cui $g(n) = (n+1)^2$ è uguale ad $1 \in A$.

Esercizio 7.4. Siano $X = \{n \in \mathbf{Z} : n < -10\}$ e $Y = \{n \in \mathbf{Z} : n \geq 5\}$. Esibire una funzione biettiva $f : X \cup Y \to \mathbf{Z}$.

Una biezione $f : X \cup Y \longrightarrow \mathbb{Z}$ è data da

$$\begin{aligned} f(n) &= n, && \text{se } n \in X, \\ f(n) &= n - 15, && \text{se } n \in Y. \end{aligned}$$

Esercizio 7.5. Sia $A = \{0, 1, 2\}$ e sia $P(A)$ l'insieme delle parti di A. Spiegare se esiste o meno una biezione da $P(A)$ all'insieme $\{(a, b) \in A \times A : a + b > 0\}$. Se esiste, esibirne una.

Siccome A ha 3 elementi, l'insieme $P(A)$ ne ha $2^3 = 8$. Il prodotto $A \times A$ ha $3 \cdot 3 = 9$ elementi. Il suo sottoinsieme $\{(a, b) \in A \times A : a + b > 0\}$ ha quindi 8 elementi perché è uguale ad $A \times A$, tolta la coppia $(0, 0)$.

Poiché i due insiemi hanno lo stesso numero di elementi, esiste una biezione fra essi. Infatti ne esistono tante (32320 per essere precisi). Eccone un esempio: la biezione g definita da

$$\begin{aligned}
g(\emptyset) &= (0,1),\\
g(\{0\}) &= (0,2),\\
g(\{1\}) &= (1,0),\\
g(\{0,1\}) &= (1,1),\\
g(\{2\}) &= (1,2),\\
g(\{0,2\}) &= (2,0),\\
g(\{1,2\}) &= (2,1),\\
g(A) &= (2,2).
\end{aligned}$$

Esercizio 7.6. Sia $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$. Determinare un'applicazione *iniettiva* $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Per definizione, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots\};$$

in particolare ha fra i suoi elementi tutti i sottoinsiemi della forma $\{n\}$, che consistono nel numero naturale n. L'applicazione

$$F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad n \mapsto \{n\}$$

è un'applicazione con le proprietà richieste.

Esercizio 7.7. *Siano dati gli insiemi*

$$X = \{6, 7, 8, 9, 10\}, \quad \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \quad Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad \mathcal{P}(X), \quad \mathcal{P}(Y).$$

(a) Stabilire quali fra questi insiemi hanno la stessa cardinalità (motivando bene le risposte).

(b) Esibire un'applicazione suriettiva $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Due insiemi finiti hanno la stessa cardinalità (esiste un'applicazione biiettiva da uno all'altro) se e solo se hanno lo stesso numero di elementi:

nel nostro caso troviamo che X e Y hanno la stessa cardinalità $|X| = |Y| = 5$;

i rispettivi insiemi delle parti hanno la stessa cardinalità $|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}(Y)| = 2^5 = 32$;

Per ogni insieme A, finito o infinito, l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ ha cardinalità superiore a quella di A. Poiché gli insiemi infiniti $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno la stessa cardinalità (numerabile), segue che $\mathbb{N}$ e $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ non hanno la stessa cardinalità.

Esercizio 7.8. Sia $A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x = \frac{a}{5^k}$ con $a = 1, 2, 3$ e $k \in \mathbf{N}\}$. In altre parole, A è l'insieme di tutti i numeri razionali della forma $\frac{a}{5^k}$, con $a = 1, 2, 3$ e $k \in \mathbf{N}$. Esibire, se possibile, una funzione biettiva $f : \mathbf{N} \to A$ e, determinarne la funzione inversa.

Soluzione. La descrizione di X suggerisce la seguente partizione: $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, dove X_1 (risp. X_2, X_3) è l'insieme dei numeri razionali del tipo $\frac{1}{5^k}$ (risp. $\frac{2}{5^k}$, $\frac{3}{5^k}$). Un modo semplice di trovare una funzione biettiva tra $\mathbf{N} \to X$ consiste nel fare corrispondere biettivamente X_1 con l'insieme $\{n \in \mathbf{N} \mid n \equiv 1 \pmod 3)$, X_2 con l'insieme $\{n \in \mathbf{N} \mid n \equiv 2 \pmod 3)$, X_3 con l'insieme $\{n \in \mathbf{N} \mid n \equiv 0 \pmod 3)^2$. Concretamente, dato $n \in \mathbf{N}$, si può definire

$$f(n) = \frac{1}{5^{\frac{n+2}{3}}} \quad \text{se} \quad n \equiv 1 \pmod 3$$

$$f(n) = \frac{2}{5^{\frac{n+1}{3}}} \quad \text{se} \quad n \equiv 2 \pmod 3$$

$$f(n) = \frac{3}{5^{\frac{n}{3}}} \quad \text{se} \quad n \equiv 0 \pmod 3$$

Quindi: $f(1) = \frac{1}{5}$, $f(2) = \frac{2}{5}$, $f(3) = \frac{3}{5}$, $f(4) = \frac{1}{5^2}$, $f(5) = \frac{2}{5^2}$, $f(6) = \frac{3}{5^2}$, ...

La funzione inversa di f è:
- dato $\frac{1}{5^k} \in X_1$, $f^{-1}(\frac{1}{5^k}) = 3k - 2$,
- dato $\frac{2}{5^k} \in X_2$, $f^{-1}(\frac{1}{5^k}) = 3k - 1$,
- dato $\frac{3}{5^k} \in X_3$, $f^{-1}(\frac{3}{5^k}) = 3k$.

Esercizio 7.9. Sia $A = \{n \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z} \text{ tale che } k^3 = n\}$. (a) Determinare una funzione biettiva $f : \mathbf{N} \to A$.
(b) Stabilire per quali dei seguenti insiemi X esiste una funzione biettiva $g : X \to A$ (N.B: non si richiede di esibire esplicitamente una tale funzione g):
(i) $X = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$; (ii) $X = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1\}$; (iii) $X = \{n \in \mathbf{Z} \mid n < 12\}$.

Soluzione. Si noti che A è l'insieme dei cubi dei numeri interi. Una funzione biettiva $f : \mathbf{N} \to A$ è, ad esempio, $f(n) = (\frac{n}{2})^3$ se n è pari, e $f(n) = (-\frac{n-1}{2})^3$ se n è dispari.

(b) (i) Si ha che $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ è numerabile, in quanto prodotto cartesiano di due insiemi numerabili, Quindi una funzione biettiva $f : \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to A$ esiste.
(ii) L'intervallo reale $(0, 1)$ non è numerabile. Quindi non esiste nessuna funzione biettiva $g : (0, 1) \to A$.
(iii) L'insieme dei numeri interi minori di 12 è numerabile, in quanto sottosinsieme infinito di un insieme numerabile. Quindi una funzione biettiva $g : \{n \in \mathbf{Z} \mid n < 12\} \to A$ esiste.

Esercizio 7.10. Sia $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \exists\, n \text{ tale che } x = \frac{1}{n}\}$. Sia $B = \{k \in \mathbf{Z} \mid k \leq -6\}$. Sia $C = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 5\}$.
Esibire una funzione biettiva $f : \mathbf{N} \to A \cup B \cup C$.

Soluzione. Si noti che B e C sono numerabili, in quanto sottoinsiemi infiniti di insiemi numerabili, mentre A è evidentemente numerabile, perchè in corrispondenza biunivoca con $\mathbf{N}$ $(n \leftrightarrow \frac{1}{n})$. Quindi $A \cup B \cup C$ è numerabile, in quanto unione finita di insiemi numerabili. Una funzione biettiva $f : \mathbf{N} \to A \cup B \cup C$ è, ad esempio,

$$f(m) = \frac{1}{\frac{m}{3}} \quad \text{se} \quad m \equiv 0 \pmod 3$$

[2] Dato un numero intero n, con la terminologia $n \equiv 0 \pmod 3$, si intende che n ún multiplo di 3, cioè della forma $3k$. Allo stesso modo, $n \equiv 1 \pmod 3$ (rispettivamente $n \equiv 2 \pmod 3$) significa che n è della foma $3k + 1$ (risp. $3k + 2$). In generale, $n \equiv 0, 1, ..., p - 1 \pmod p$ significa che n è della forma pk (rispettivamente $pk + 1$, rispettivamente ... $pk + p - 1$). Questa terminologia troverà la sua spiegazione nel seguito del corso, nei capitoli sui numeri interi.

$$f(m) = -\frac{m+2}{3} - 5 \quad \text{se} \quad m \equiv 1 \pmod 3$$
$$f(m) = -\frac{m+1}{3} + 4 \quad \text{se} \quad m \equiv 2 \pmod 3$$

Esercizio 7.11. Sia $A = \{n \in \mathbf{N} \mid n \equiv 3 \pmod 7\}$. Determinare:

a) una funzione biettiva $f : A \to \mathbf{Z}$,

b) una funzione $g : A \to \mathbf{Z}$ iniettiva ma non suriettiva,

c) una funzione $h : A \to \mathbf{Z}$ suriettiva ma non iniettiva.

SOLUZIONE: (a) Si noti innanzitutto che A è un insieme infinito contenuto in $\mathbf{N}$. Quindi è numerabile. Poichè anche $\mathbf{Z}$ è numerabile, esistono funzioni biettive tra A e $\mathbf{Z}$. Gli elementi di A sono i numeri naturali della forma $n = 3 + 7k$, per $k \geq 0$. La funzione $f : A \to \mathbf{Z}$ cosi' definita: $f(3+7k) = \frac{k}{2}$ se k pari, e $f(3+7k) = -\frac{k+1}{2}$ se k dispari, è biettiva.

(b) L'esempio più immediato è $g : A \to \mathbf{Z}$, $f(n) = n$.

(c) Ad esempio, la funzione $h : A \to \mathbf{Z}$ così definita: $h(3+7k) = \frac{k}{2}$ se k pari, e $h(3+7k) = \frac{k-1}{2}$ se k se k dispari è chiaramente suriettiva, ma non è iniettiva: infatti $h(0) = \frac{0}{2} = 0$ e anche $h(1) = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$.

Esercizio 7.12. Sia $F = \{n \in \mathbf{Z} \text{ tali che } n \equiv 0 \pmod 7\}$. (a) Stabilire quali tra i seguenti insiemi hanno la stessa cardinalità: $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, F, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$.
(b) Tra gli insiemi del punto (a), sceglierne a piacere uno con la stessa cardinalità di F (diverso da F) e scrivere una funzione biettiva da tale insieme a F.

Si ha
$$F = \{n \in \mathbf{Z} \text{ tali che } n \equiv 0 \pmod 7\} = \{n = 7k, \quad k \in \mathbf{Z}\}.$$
In particolare, F è in corrispondenza biunivoca con gli interi mediante l'applicazione
$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow F, \quad k \mapsto 7k.$$
Gli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, F hanno tutti la stessa cardinalità che è quella del numerabile. Gli insiemi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hanno la stessa cardinalià, che è quella del continuo. La cardinalità del continuo è superiore a quella del numerabile, così gli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, F non hanno la stessa cardinalità degli insiemi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.