

1. Determinare la tavola della verità di ciascuna delle seguenti forme proposizionali:
  - (a)  $p \Rightarrow (\neg q \vee r)$ ; (b)  $\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ; (c)  $(p \Rightarrow q) \vee (\neg p \Rightarrow r)$ ;
  - (d)  $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$ ; (e)  $(p \Leftrightarrow q) \vee (\neg q \Leftrightarrow r)$ ; (f)  $(\neg p \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$ ;
  - (g)  $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow s$ ; (h)  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow s)$ .
2. Verificare le seguenti equivalenze logiche fra forme proposizionali.
  - (a)  $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ ,  $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ , (leggi di assorbimento);
  - (b)  $((p \wedge q) \vee \neg q) \Leftrightarrow (p \vee \neg q)$ ,  $((p \vee q) \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
  - (c)  $(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ ;
  - (d)  $(\neg(p \Leftrightarrow q)) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow q)$ .
  - (e)  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ .
3. Determinare quali tra le seguenti forme proposizionali sono tautologie e quali sono contraddizioni.
  - (a)  $(\neg p \wedge (p \vee q)) \Rightarrow q$ ; (b)  $(\neg p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$ ; (c)  $(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$ ;
  - (d)  $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ ; (e)  $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((r \Rightarrow p) \Rightarrow (s \Rightarrow p))$
4. Stabilire se le seguenti forme proposizionali  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$  e  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$  sono equivalenti.
5. Dimostrare che se  $p$  e  $p \Rightarrow q$  sono tautologie allora  $q$  è una tautologia.
6. Scrivere  $\Leftrightarrow$  come combinazione di  $\neg$ ,  $\vee$  e  $\wedge$ .
7. Scrivere forme normali disgiuntive logicamente equivalenti alle seguenti forme proposizionali
  - (a)  $(p \vee q) \vee (p \rightarrow q)$ ; (b)  $\neg(p \vee r) \vee (p \rightarrow q)$ ; (c)  $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ ;
  - (d)  $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$ ; (e)  $\neg p \vee (q \rightarrow \neg r)$ .
8. La *Freccia di Peirce* (NOR o “negazione congiunta”)  $p \downarrow q$  è logicamente equivalente a  $\neg(p \vee q)$ . Verificare che  $\{\downarrow\}$  è un sistema completo di connettivi logici:
  - (a) mostrare che  $\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p$
  - (b) mostrare che  $p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$ ;
  - (c) mostrare che  $p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ ;
  - (d) trovare una forma proposizionale solo in  $\downarrow$  logicamente equivalente a  $p \wedge \neg q$ .
9. Il NAND o “negazione alternata”  $p \mid q$  è logicamente equivalente a  $\neg(p \wedge q)$ . Verificare che  $\{\mid\}$  è un sistema completo di connettivi logici:
  - (a) mostrare che  $\neg p \Leftrightarrow p \mid p$ ;
  - (b) mostrare che  $p \wedge q \Leftrightarrow (p \mid q) \mid (p \mid q)$ ;
  - (c) mostrare che  $p \vee q \Leftrightarrow ((p \mid p) \mid (q \mid q))$ ;
  - (d) trovare una forma proposizionale solo in  $\mid$  logicamente equivalente a  $p \wedge \neg q$
10. Riscrivere ciascuna delle seguenti proposizioni in modo tale che le negazioni siano poste solo davanti ai predicati (cioè non ci devono essere negazioni davanti a un quantificatore o davanti a un’espressione che comprenda connettivi logici)
  - (a)  $\neg(\exists y \exists x P(x, y))$ ; (b)  $\neg(\forall x \exists y P(x, y))$ ; (c)  $\neg \exists y (Q(y) \wedge \forall x \neg R(x, y))$ ;
  - (d)  $\neg \exists y (\exists x R(x, y) \vee \forall x S(x, y))$ ; (e)  $\neg \exists y (\forall x \exists z T(x, y, z) \vee \exists x \forall z U(x, y, z))$ ;
  - (f)  $\neg(\exists x \exists y \neg P(x, y) \wedge \forall x \forall y Q(x, y))$ ; (g)  $\neg \forall x (\exists y \forall z P(x, y, z) \wedge \exists z \forall y P(x, y, z))$
11. (a) Sia  $S \subset \mathbf{R}$ . Usando i quantificatori, esprimere il fatto che  $x = \sup(S)$ ;
- (b) Usando i quantificatori, esprimere che  $y \neq \sup(S)$ ;
- (c) Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  e sia  $x_0 \in \mathbf{R}$ . Usando i quantificatori esprimere il fatto che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  esiste;
- (d) Usando i quantificatori esprimere il fatto che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  non esiste;
- (e) Sia  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Usando i quantificatori esprimere il fatto che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ ;
- (f) Usando i quantificatori esprimere il fatto che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge;
- (g) Esprimere il fatto che  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  non converge;
- (h) Sia  $\sigma \in \mathbf{R}$ . Usando i quantificatori, esprimere il fatto che  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sigma$ ;
- (i) Usando i quantificatori esprimere il fatto che  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  sono vettori linearmente indipendenti.