

1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X . Indichiamo con \cap e \cup le operazioni di intersezione e di unione fra sottoinsiemi di X .
 - (a) Dimostrare che $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ è un reticolo (verificare che soddisfa gli assiomi);
 - (b) Verificare che la relazione di ordine parziale definita a partire dalle operazioni di reticolo

$$A \leq B \text{ se } A \cap B = A \quad (\Leftrightarrow \quad A \cup B = B)$$

è la relazione di contenenza: $A \leq B$ se $A \subset B$.

2. Sia X un insieme e sia $(\mathcal{P}(X), \subset)$ l'insieme delle parti di X , con la relazione di ordine parziale dato dalla relazione di *contenenza*.
 - (a) Verificare che per ogni coppia A, B esistono $Z, W \in \mathcal{P}(X)$ tali che

$$\begin{cases} Z \subset A \\ Z \subset B \end{cases}, \quad \begin{cases} A \subset W \\ B \subset W \end{cases}.$$

- (b) Verificare che le operazioni su $(\mathcal{P}(X), \subset)$ definite da

$$\inf\{A, B\}, \quad \sup\{A, B\}$$

coincidono rispettivamente con le operazioni di intersezione \cap e di unione \cup .

3. Sia \mathbf{N} l'insieme dei numeri naturali. Indichiamo con mcd e mcm le operazioni di *massimo comun divisore* e *minimo comune multiplo* fra numeri naturali.
 - (a) Dimostrare che (\mathbf{N}, mcd, mcm) è un reticolo (verificare che soddisfa gli assiomi);
 - (b) Verificare che la relazione di ordine parziale definita a partire dalle operazioni di reticolo

$$m \leq n \text{ se } mcd(m, n) = m \quad (\Leftrightarrow \quad mcm(m, n) = n)$$

è la relazione di *divisibilità*: $m \leq n$ se $m \mid n$.

4. Sia (\mathbf{N}, \mid) l'insieme dei numeri naturali con la relazione di ordine parziale data dalla divisibilità.
 - (a) Verificare che per ogni coppia $m, n \in \mathbf{N}$ esistono $z, w \in \mathbf{N}$ tali che

$$\begin{cases} z \mid m \\ z \mid n, \end{cases} \quad \begin{cases} m \mid w \\ n \mid w. \end{cases}$$

- (b) Verificare che le operazioni su (\mathbf{N}, \mid) definite da

$$\inf\{A, B\}, \quad \sup\{A, B\}$$

coincidono rispettivamente con le operazioni di intersezione mcd e di unione mcm .

5. Sia X un insieme e sia $Y \subset X$ un sottoinsieme.
 - (a) Verificare che $\mathcal{P}(Y)$ è un sottoreticolo di $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$, ossia è chiuso rispetto alle operazioni di intersezione e di unione.
 - (b) Disegnare il diagramma di Hasse di $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ ed evidenziare il sottoreticolo $\mathcal{P}(\{a, b\})$.
6. Sia $n \in \mathbf{N}$ un numero naturale fissato e sia D_n l'insieme dei divisori di n

$$D_n = \{a \in \mathbf{N} \mid a \mid n\}.$$

- (a) Verificare che D_n è un sottoreticolo di (\mathbf{N}, mcd, mcm) , ossia è chiuso rispetto alle operazioni di mcd e di mcm .
 - (b) Sia $m < n$ un divisore di n . Verificare che D_m è un sottoreticolo di D_n .
 - (c) Disegnare il diagramma di Hasse di D_{12} ed evidenziare il sottoreticolo D_6 .
7. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottoreticoli di $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}), \cap, \cup)$:
- (a) $\{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) : |A| \text{ dispari}\}$; (c) $\{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) : A \supseteq \{1, 3\}\}$;
 - (b) $\{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) : |A| \geq 2\}$; (d) $\{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) : |A| \leq 1 \text{ oppure } |A| = 3\}$
8. Siano (L, \vee, \wedge) e (L', \vee', \wedge') due reticoli. Un *isomorfismo di reticoli* è una funzione biettiva $f : L \rightarrow L'$ tale che per ogni $x, y \in L$ valgono

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y), \quad f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y).$$

In tal caso i due reticoli si dicono *isomorfi*.

- (a) Dimostrare che se $f : L \rightarrow L'$ è un isomorfismo di reticoli allora anche $f^{-1} : L' \rightarrow L$ lo è;
- (b) Siano “ \leq ” e “ \leq' ” le relazioni di ordine parziale su L e su L' definite a partire dalle rispettive operazioni. Verificare che se $f : L \rightarrow L'$ è un isomorfismo di reticoli allora

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \leq' f(b).$$

- 9. Verificare che i reticoli (D_6, mcd, mcm) e (D_{15}, mcd, mcm) sono isomorfi (esibire un isomorfismo di reticoli);
- 10. Verificare che i reticoli (D_6, mcd, mcm) e $(\mathcal{P}(\{1, 2\}), \cap, \cup)$ sono isomorfi (esibire un isomorfismo di reticoli);
- 11. Verificare che i reticoli (D_6, mcd, mcm) e (D_8, mcd, mcm) non sono isomorfi.
- 12. Un isomorfismo $f : (L, \wedge, \vee) \rightarrow (L, \wedge, \vee)$ di un reticolo in sè si dice un *automorfismo* del reticolo. Determinare quanti sono gli automorfismi del reticolo (D_6, mcd, mcm) .
- 13. Stabilire se \mathbf{D}_{30} e $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ sono reticoli isomorfi; in caso affermativo, stabilire quanti sono gli isomorfismi di reticolo $f : \mathbf{D}_{30} \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
- 14. Stabilire se i reticoli \mathbf{D}_{30} e \mathbf{D}_{105} sono isomorfi. In caso affermativo, determinare tutti gli isomorfismi di reticolo $f : \mathbf{D}_{30} \rightarrow \mathbf{D}_{105}$.
- 15. Stabilire se i reticoli $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ e \mathbf{D}_{24} sono isomorfi. Stabilire se uno dei due reticoli è isomorfo a \mathbf{D}_{30} .
- 16. Stabilire se i reticoli \mathbf{D}_{12} e \mathbf{D}_{18} sono isomorfi. In caso affermativo, determinare tutti gli isomorfismi di reticolo $f : \mathbf{D}_{12} \rightarrow \mathbf{D}_{18}$.
- 17. Verificare che il reticolo (\mathbf{N}, mcd, mcm) ha minimo, ma non ha massimo.
- 18. Sia X un insieme arbitrario (possibilmente infinito). Verificare che il reticolo $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ ha minimo e massimo. Chi sono?
- 19. Sia $n \in \mathbf{N}$ un numero naturale fissato.
 - (a) Determinare il minimo e il massimo del reticolo (D_n, mcd, mcm) ;
 - (b) Dimostrare che D_n è complementato se e solo se n è prodotto di primi distinti.
- 20. Si consideri il reticolo $L = \{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) : A \subseteq \{1, 2, 3\}\}$, con le operazioni di unione e intersezione.
 - (a) Dimostrare che L è limitato;

- (b) Stabilire se ci sono elementi il cui complemento non è unico;
 - (c) Stabilire se L è un reticolo distributivo.
21. Quali dei seguenti reticoli sono reticoli con complemento?
- (a) \mathbf{D}_{70} ;
 - (b) \mathbf{D}_{18} ;
 - (c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$.
22. Stabilire se i seguenti reticoli sono reticoli distributivi, reticoli con complemento, reticoli con complemento unico:
- (a) $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, munito delle operazioni mcd e mcm ;
 - (b) \mathbf{D}_{12} ;
 - (c) $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$;
 - (d) \mathbf{D}_{30} ;
 - (e) $\{1, 6, 10, 15, 30, 60, 90, 180\}$, munito delle operazioni di inf e sup indotte dalla relazione di ordine parziale data dalla divisibilità.
23. Considerare l'esercizio 14.80 del libro di Schaum. Verificare che il diagramma di Hasse del reticolo D_{60} contenuto nella figura 14–29 a pag. 475 è sbagliato.