

1. Determinare tutti i numeri primi  $100 \leq p \leq 120$ .
2. (i) Dimostrare che se  $n \geq 2$  non è primo, allora esiste un primo  $p$  che divide  $n$  e tale che  $p^2 \leq n$ .  
 (ii) Sfruttare il risultato (i) per dimostrare che 467 è primo (basta verificare che non ha divisori minori o uguali a 19).
3. Dimostrare che il numero 123456789 non è primo.
4. Fattorizzare i seguenti numeri in fattori primi.
 

(a) 91;	(d) $15^2 - 2^2$ ;	(g) $2^{11} - 1$ ;
(b) 210;	(e) $10!$ ;	(h) 10001;
(c) $6^6$ ;	(f) $2^{10} - 1$ ;	(i) 100000003.
5. Calcolare il massimo comun divisore fra le seguenti coppie di numeri:  $\text{mcd}(623, 413)$ ,  $\text{mcd}(1014, 273)$ ,  $\text{mcd}(1122, 105)$ ,  $\text{mcd}(2244, 418)$ .
6. Definiamo sui numeri naturali  $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  la relazione “ $aRb$  se  $\text{mcd}(a, b) > 1$ ”. Determinare se la relazione è riflessiva, simmetrica o transitiva.
7. Siano  $a = da'$  e  $b = db'$  interi con  $\text{mcd}(a, b) = d$ . Dimostrare che  $\text{mcd}(a', b') = 1$ .
8. Siano  $n, m$  due numeri naturali. Siano  $\text{mcd}(n, m)$  e  $\text{mcm}(n, m)$  il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo fra  $n$  ed  $m$ . Dimostrare che  $\text{mcm}(n, m) \cdot \text{mcd}(n, m) = nm$ .
9. Per i seguenti numeri  $n$  e  $m$ , determinare  $a, b \in \mathbf{Z}$  tali che  $an + bm = \text{mcd}(n, m)$ .
 

(a) $n = 4$ e $m = 30$ ;	(c) $n = 103$ e $m = 101$ ;	(e) $n = 221$ e $m = 169$ ;
(b) $n = 14$ e $m = 40$ ;	(d) $n = 91$ e $m = 0$ ;	(g) $n = 10001$ e $m = 9999$ .
10. (a) Stabilire se esistono  $s, t \in \mathbf{Z}$  tali che  $24s + 18t = 20$ ;  
 (b) Stabilire se esistono  $s, t \in \mathbf{Z}$  tali che  $24s + 18t = -12$ ;  
 (c) Stabilire se esistono  $s, t \in \mathbf{Z}$  tali che  $24s + 18t = 3$ .
11. Determinare se la seguente equazione diofantea ha soluzioni:
 
$$2000000007X + 1000000000Y = 3.$$
12. Dare una descrizione esplicita delle classi di congruenza modulo 3 e delle classi di congruenza modulo 5 in  $\mathbf{Z}$ .
13. Senza fare la moltiplicazione, determinare il resto della divisione per 10 e per 5 dei seguenti numeri
 
$$12345678 \times 90123, \quad 9085679 \times 120001, \quad 4876515329871674 \times 765976.$$
14. Verificare che  $2468 \times 13579 \equiv -3 \pmod{25}$ .

15. Determinare tutte le soluzioni intere  $x \in \mathbf{Z}$  delle seguenti congruenze  
 (a)  $x \equiv 3 \pmod{11}$ ;                      (b)  $3x \equiv 1 \pmod{5}$ ;                      (c)  $9x \equiv 0 \pmod{30}$ .
16. Dimostrare che la congruenza  $2x \equiv 3 \pmod{2}$  non ha soluzioni  $x \in \mathbf{Z}$ .
17. Stabilire se per le seguenti congruenze esistono soluzioni intere  $x \in \mathbf{Z}$ . In caso affermativo, determinarle tutte. Determinare poi le soluzioni  $x \in \mathbf{Z}$  che soddisfano  $0 < x < 100$ .  
 (a)  $5x \equiv 8 \pmod{17}$ ;                      (b)  $9x \equiv 26 \pmod{30}$ ;                      (c)  $9x \equiv 24 \pmod{30}$ .
18. Stabilire se per i seguenti sistemi di congruenze esistono soluzioni intere  $x \in \mathbf{Z}$ . In caso affermativo, determinarle tutte.

$$(a) \quad \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{8}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases} \quad (c) \quad \begin{cases} 9x \equiv 20 \pmod{8}, \\ x \equiv -2 \pmod{5}, \\ -8x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} 5x \equiv 4 \pmod{8}, \\ 3x \equiv 3 \pmod{5}, \\ 2x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases} \quad (d) \quad \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{8}, \\ x \equiv 1 \pmod{4}; \end{cases}$$

19. Determinare il resto delle divisioni per 3, 9, 4, 11 del numero 3548917.
20. Sia  $x = (x_n x_{n-1} \dots x_0)_{10}$  un numero intero positivo rappresentato in base 10. Far vedere che  $x \equiv x_n + x_{n-1} + \dots + x_0 \pmod{9}$ .  
 Usare questo risultato per dimostrare che la moltiplicazione  $54321 \times 98765 = 5363013565$  è sbagliata.
21. Andare al sito <http://www.mat.uniroma2.it/~eal/psychic.swf>. Spiegare come mai la sfera magica riesce a sempre indovinare il simbolo giusto.
22. Sia  $x = (x_n x_{n-1} \dots x_0)_{10}$  un numero intero positivo rappresentato in base 10. Far vedere che  $x \equiv x_0 - x_1 + x_2 - \dots + (-1)^n x_n \pmod{11}$ .  
 Usare questo risultato per controllare se 1213141516171819 è divisibile per 11.
23. Sia  $x$  un numero naturale di 3 cifre (in base 10). Supponiamo che

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 3 \pmod{13}. \end{cases}$$

Determinare  $x$ .