1. Siano $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Determinare:
   (a) $A \cap B \cap C$; (c) $A \cup (B \cap C)$; (e) $A - (B - C)$;
   (b) $(A \cup B) \cap C$; (d) $(A - B) - C$; (f) $A \cap (B - C)$.

2. (a) Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $A_n = \{m \in \mathbf{N} : m \leq n\}$. Determinare $A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7$ e determinare $A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$.
   (b) Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $B_n = \{m \in \mathbf{Z} : \text{esiste un } k \in \mathbf{Z} \text{ tale che } m = kn\}$. Determinare $B_4 \cap B_5 \cap B_6$.

3. Costruire tre insiemi A, B, C per cui $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$.

4. Siano A, B sottoinsiemi di un insieme X. È vero che $A^c \cup B^c = (A \cup B)^c$??? Dimostrarlo, o determinare insiemi A, B, X per cui non vale.

5. Siano A, B e C tre sottoinsiemi di X. Dimostrare
   (a) $A \cup B \subset A \cup B \cup C$; (c) $(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$;
   (b) $(A - B) - C \subset A - C$; (d) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$.

6. Determinare le seguenti intersezioni infinite $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}}]-\infty, n]$, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [n, \infty[$.

7. Determinare le seguenti unioni infinite $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $\bigcup_{n \in \mathbf{N}}]-\infty, n]$, $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [n, \infty[$.

8. (a) Determinare l'insiemi delle parti dei seguenti insiemi:

$$A = \{x, y, z\}, \qquad B = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}, \qquad C = \{a, \{a, b\}, \{f\}\}.$$

9. (a) Determinare $\mathcal{P}(\emptyset)$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
   (b) Determinare $\mathcal{P}(\{0\})$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\}))$.

Sol.

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\{\emptyset\}\}, \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \qquad \mathcal{P}(\{0\}) = \{\emptyset, \{0\}\}, \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{0\}, \{\emptyset, \{0\}\}.$$

10. Sia $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, definita da $f(n) = 3n^2$. Determinare se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

11. Sia $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{N}$, definita da $f(n) = 3n^2 + 4$. Determinare se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

12. Siano $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
   (i) Determinare due funzioni iniettive distinte $f, g \colon A \to B$. Quante ce ne sono in tutto?
   (ii) Determinare due funzioni suriettive distinte $f, g \colon B \to A$. Ne esistono di iniettive?
   (iii) Determinare due funzioni biiettive distinte $f, g \colon B \to C$. Quante ce ne sono in tutto?

13. Costruire una funzione $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$ tale che
   (a) f è una iniezione ma non una suriezione.
   (b) f è una suriezione ma non una iniezione.

14. Se esiste, costruire una biiezione fra i seguenti insiemi.
   (a) $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{7, 8, 10\}$; (c) $\mathbf{Z}$ e $\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ è dispari}\}$; (e) $\mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$;
   (b) $A = \{0, 1\}$ e $B = \{1\}$; (d) $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R} - \{0\}$; (f) $A = \{a, b\}$ e $\mathcal{P}(A)$.

15. Costruire due insiemi finiti A, B per cui $\mathrm{card(A \cup B)} \neq \mathrm{card(A)} + \mathrm{card(B)}$ e due insiemi finiti C, D per cui $\mathrm{card(C \cup D)} = \mathrm{card(C)} + \mathrm{card(D)}$.

16. Dimostrare i seguenti fatti:
   (a) Sia $A \subset B$ un sottoinsieme di un insieme numerabile. Allora A è finito oppure è numerabile.
   (b) Siano A, B due insiemi numerabili. Allora gli insiemi $A \cup B$ e $A \times B$ sono numerabili.
   (c) Per $k = 1, 2, 3, \ldots$, siano A_k insiemi numerabili. Allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ è numerabile.

17. Sia $a > -1$. Dimostrare per induzione che $(1+a)^n \geq 1 + na$, per ogni $n \in \mathbf{N}$.

18. Dimostrare per induzione che $n^3 - n$ è multiplo di 3, per ogni $n \in \mathbf{N}$.

19. Dimostrare per induzione che $n^3 + 3n^2 + 2n$ è multiplo di 6, per ogni $n \in \mathbf{N}$.

20. (i) Dimostrare per induzione che $3^n < n!$ per ogni $n \geq 7$.
    (ii) Trovare $n_0 \in \mathbf{N}$ tale che $4^{n_0} < n_0!$. Dimostrare per induzione che $4^n < n!$ per ogni $n \geq n_0$.

21. Per quali numeri naturali n si ha che $n! \geq n^2$? Dimostrare per induzione la risposta data.

22. Dimostrare per induzione che $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ per ogni intero $n \geq 1$.

23. Dimostrare per induzione che la somma dei cubi dei primi n numeri pari è uguale a $2n^2(n+1)^2$.

24. (a) Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, risulta $\sum_{i=0}^{n}(4i+1) = (2n+1)(n+1)$.
    (b) Determinare $\sum_{i=0}^{n}(4i+2)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

25. Sia $F\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ la funzione ricorsiva definita da $F(0) = 1$, $F(n) = F(n-1) + 2$, per $n \geq 1$. Calcolare $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$. Chi sono i numeri $F(n)$?

26. Sia $F\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ la funzione ricorsiva definita da $F(1) = 1$, $F(n) = n + F(n-1)$, per $n \geq 1$. Calcolare $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$. Dimostrare per induzione che $F(n) = n(n+1)/2$.

27. Siano $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, ed $F_k = F_{k-2} + F_{k-1}$, per $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, i numeri di Fibonacci.
    (i) Dimostrare che $F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$.
    (ii) Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, risulta che $\mathrm{mcd}(F_n, F_{n+1}) = 1$.
    (iii) Dimostrare che $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$ per ogni $n \geq 1$.

28. Sia $g\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ la funzione ricorsiva definita da $g(0) = 2$, $g(1) = 5$ e $g(n) = g(n-2) - g(n-1)$, per $n \geq 2$. Calcolare $g(5)$.