1 Dimostrare che la somma di due numeri pari è pari, la somma di due numeri dispari è pari e la somma di un numero pari e un numero dispari è dispari. Dedurne la tabella dell'addizione fra le classi resto modulo 2.
Dimostrare che il prodotto di due numeri pari è pari, il prodotto di due numeri dispari è dispari e il prodotto di un numero pari e un numero dispari è pari. Dedurne la tabella del prodotto fra le classi resto modulo 2.

2. Dimostrare che la classe resto modulo 10 di un intero è data dall'ultima cifra e che la classe resto modulo 100 è data dalle ultime due cifre.

3. Sia n un intero che diviso per 7 dà resto 5 e sia m un intero che diviso per 7 dà resto 2. Dividendo $n+m$ per 7, che resto troviamo? Dividendo $n \cdot m$ per 7, che resto troviamo? Giustificare bene le risposte.

4. Scrivere la tabella completa della somma fra le classi resto modulo 7 e la tabella completa del prodotto fra le classi resto modulo 7.

5. Sia n un intero che diviso per 11 dà resto 5 e sia m un intero che diviso per 11 dà resto 9. Dividendo $n+m$ per 11, che resto troviamo? Dividendo $n \cdot m$ per 11, che resto troviamo? Giustificare bene le risposte.

6. Scrivere la tabella completa della somma fra le classi resto modulo 6 e la tabella completa del prodotto fra le classi resto modulo 6.

7. A partire dalle tabelle calcolate nell'esercizio 4, per ogni $\bar{x} \in \mathbf{Z}_7$ determinare $\bar{y} \in \mathbf{Z}_7$, tale che $\bar{x}+\bar{y}=\bar{0}$. Per quali $\bar{x} \in \mathbf{Z}_7$ esiste $\bar{y} \in \mathbf{Z}_7$ per cui vale $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{1}$?

8. A partire dalle tabelle calcolate nell'esercizio 6, per ogni $\bar{x} \in \mathbf{Z}_6$ determinare $\bar{y} \in \mathbf{Z}_6$, tale che $\bar{x}+\bar{y}=\bar{0}$. Per quali $\bar{x} \in \mathbf{Z}_6$ esiste $\bar{y} \in \mathbf{Z}_6$ per cui vale $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{1}$?

9. Sia $n=17$ e sia $\mathbf{Z}_{17} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{15}, \overline{16}\}$ l'insieme delle classi resto modulo 17.
   (a) In $\mathbf{Z}_{17}$ calcolare
$$\overline{16}+\overline{10}, \quad \overline{16}\cdot\overline{10}, \quad 4\cdot\overline{11}+\overline{10}^2$$
   (b) Per ogni $\bar{x} \in \mathbf{Z}_{17}$ determinare $\bar{y} \in \mathbf{Z}_{17}$, tale che $\bar{x}+\bar{y}=\bar{0}$.
   (c) Data $\bar{7} \in \mathbf{Z}_{17}$, determinare, se esiste, $\bar{x} \in \mathbf{Z}_{17}$ tale che $\bar{7}\cdot\bar{x}=\bar{1}$ (provare tutti i prodotti $\bar{7}\cdot\bar{x}$ al variare di $\bar{x} \in \mathbf{Z}_{17}$).

Abbiamo enunciato, per il momento senza dimostrazione, la seguente proposizione:

Proposizione. *Sia n un intero positivo. Una classe $\bar{a} \in \mathbf{Z}_n$ ammette inverso moltiplicativo (cioè esiste $\bar{y} \in \mathbf{Z}_n$ tale che $\bar{a}\cdot\bar{y}=\bar{1}$) se e solo se* $\mathrm{mcd}(a,n)=1$.

10.(a) Determinare se $\bar{x}=\overline{111}$ ammette inverso moltiplicativo in $\mathbf{Z}_{1010}$.
   (b) Verificare che $\bar{x}=\overline{97}$ e $\bar{y}=\overline{373}$ ammettono inverso moltiplicativo in $\mathbf{Z}_{2010}$ e sono uno inverso dell'altro.
   (c) Determinare tutte le classi $\bar{x} \in \mathbf{Z}_{1010}$ che non ammettono inverso moltiplicativo.

11. Sia $n=1001$.
   (a) Verificare che $\bar{x}=\overline{171}$ ammette inverso moltiplicativo in $\mathbf{Z}_{1001}$.
   (b) Determinare $\bar{x}^{-1}$ fra le seguenti possibilità: $\bar{2}$, $\bar{9}$, $\overline{150}$, $\overline{761}$, $\overline{999}$.

12. Fate la lista di tutti i gruppi che conoscete.