

1. Sia  $p$  un numero primo e sia  $n = mp + 1$ , con  $m \in \mathbf{Z}$ . Chi è il resto della divisione di  $n$  per  $p$ ? Prendere spunto da questo fatto per dimostrare che i numeri primi sono infiniti.
2. Sia  $n \in \mathbf{Z}$ . Calcolare  $\text{mcd}(n+1, n)$  e  $\text{mcd}(n+2, n)$  (nel secondo caso, esaminare separatamente  $n = 2k$  pari e  $n = 2k + 1$  dispari).
3. Determinare il massimo comune divisore fra  $m = 4567$  ed  $n = -668$ , fra  $m = -4567$  ed  $n = 668$  e fra  $m = -4567$  ed  $n = -668$ .
4. È vero che  $n = 56$  divide  $m = -392$  e che  $n = -56$  divide  $m = -392$ ? Spiegare la risposta.
5. È vero che ogni soluzione intera dell'equazione  $20x + 10y = 0$  è anche soluzione dell'equazione  $4x + 2y = 0$  e dell'equazione  $2x + y = 0$ ? È vero il viceversa? Spiegare bene. Determinare la soluzione generale dell'equazione  $20x + 10y = 0$ .
6. È vero che ogni soluzione intera dell'equazione  $20x + 10y = 10$  è anche soluzione dell'equazione  $4x + 2y = 2$ ? È vero il viceversa? Spiegare bene. Determinare la soluzione generale dell'equazione  $20x + 10y = 10$ .
7. Siano dati  $m = 1009$  e  $n = 1013$ .
  - (a) Calcolare il massimo comune divisore  $\text{mcd}(m, n)$ .
  - (b) Determinare una coppia di interi  $a, b \in \mathbf{Z}$  tali che  $am + bn = \text{mcd}(m, n)$ .
  - (c) Determinare tutte le coppie di interi  $(a, b)$  tali che  $am + bn = \text{mcd}(m, n)$ .
  - (d) Determinare tutte le coppie di interi  $(a, b)$  tali che  $a1009 + b1013 = 3$  (spiegare bene).
  - (e) Determinare tutte le coppie di interi  $(a, b)$  tali che  $2a1009 + 2b1013 = 2$  (spiegare bene).
  - (f) Ripetere (a)–(e) per  $m = 4657, n = 345, m = 567, n = 789$ .
8. A partire dalla relazione  $623 \cdot 30 - 45 \cdot 413 = 105$ , dire quali possono essere i valori di  $\text{mcd}(623, 413)$  e di  $\text{mcd}(30, 413)$  (senza calcolarli esplicitamente).
9. A partire dalla relazione  $62 \cdot 61728 - 97 \cdot 39455 = 1$ , calcolare:

$$\text{mcd}(62, 97), \quad \text{mcd}(62, 39455), \quad \text{mcd}(61728, 97), \quad \text{mcd}(61728, 39455).$$

Determinare tutte le soluzioni intere delle equazioni

$$62x + 39455y = 2, \quad 62x + 97y = 5, \quad 61728x + 39455y = 10.$$

10. Determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione  $56789x + 34567y = 2$ .