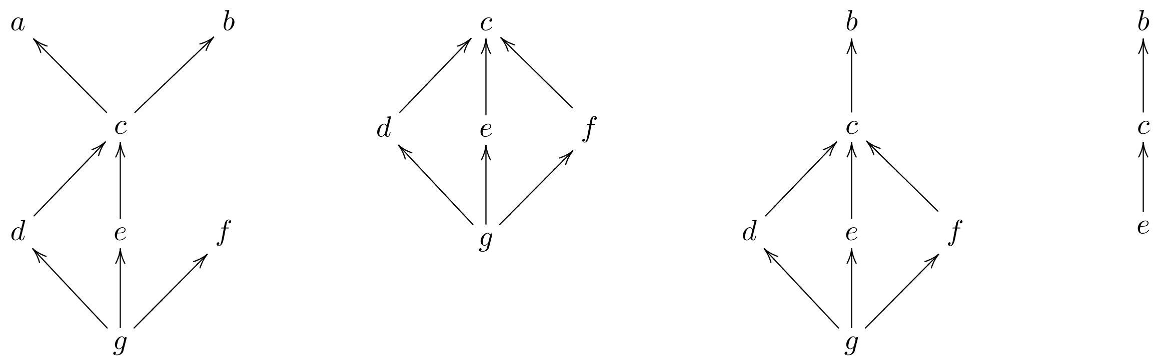
Algebra e Logica 2011. Esercizi 4. Relazioni, relazioni di ordine.

1. Sull'insieme $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ definiamo la seguente relazione: mRn se $m|n$, cioè se m *divide* n (per definizione, m divide n se esiste $k \in \mathbf{Z}$ per cui vale $n = km$). Verificare che R è una relazione di ordine su $\mathbf{N}$. Determinare se la relazione R è una relazione di ordine totale su $\mathbf{N}$.

2. Sia $D_{25} = \{1, 5, 25\}$ l'insieme dei divisori di 25 con la relazione di ordine data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Elencare tutti gli elementi di R in $D_{25} \times D_{25}$. Disegnare il diagramma di Hasse di R. Determinare se la relazione R è una relazione di ordine totale su D_{25}.

3. Sia $X = \mathcal{P}(\{a, b\})$ l'insieme della parti di $\{a, b\}$ con la relazione di ordine data dalla contenenza: ARB se $A \subset B$. Elencare tutti gli elementi di R in $X \times X$. Disegnare il diagramma di Hasse di R. Determinare se la relazione R è una relazione di ordine totale su $X = \mathcal{P}(\{a, b\})$.

4. Siano dati i seguenti diagrammi



e supponiamo che siano i diagrammi di Hasse di altrettante relazioni di ordine $R_1, \ldots, R_4$ definite rispettivamente sugli insiemi $X_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $X_2 = \{c, d, e, f, g\}$, $X_3 = \{b, c, d, e, f, g\}$, $X_4 = \{b, c, e\}$.
   (a) Determinare tutti gli elementi di R_2 in $X_2 \times X_2$ e di R_4 in $X_4 \times X_4$.
   (b) Determinare $\{x \in X_1 \mid xR_1c\}$ e $\{x \in X_3 \mid xR_3c\}$.
   (c) Per ognuno degli insiemi ordinati (X_i, R_i), per $i = 1, \ldots, 4$, determinare gli elementi massimali, gli elementi minimali ed eventuali massimi e minimi. Giustificare bene le risposte in base alle definizioni corrispondenti.

5. Sia $X = \{(1, 2, 0), (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 3, 0), (2, 1, 1), (4, 1, 1), (3, 3, 3)\}$ con l'ordinamento lessicografico. Disegnare il diagramma di Hasse associato.

6. Sia D_{30} l'insieme dei divisori di 30 con la relazione di ordine parziale data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Disegnare il diagramma di Hasse di D_{30} e per ogni coppia di elementi distinti $a, b \in D_{30}$ determinare, se esistono, $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$.

7. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con la relazione di ordine data da: aRb se $a \leq b$. Disegnare il diagramma di Hasse di A e per ogni coppia di elementi distinti $a, b \in A$ determinare, se esistono, $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$. Dire se R definisce un ordinamento totale su A.

8. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con la relazione di ordine data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Disegnare il diagramma di Hasse di A e per ogni coppia di elementi distinti $a, b \in A$ determinare, se esistono, $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$. Dire se R definisce un ordinamento totale su A.

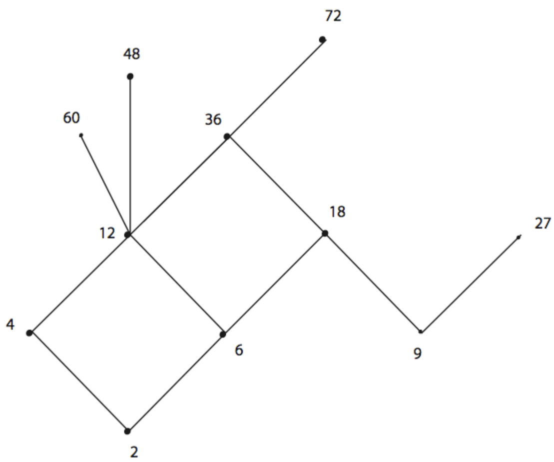
9. Sia D_{36} l'insieme dei divisori di 36 con la relazione di ordine data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Sia $S = \{4, 6\} \subset D_{36}$.
   (a) Con quali elementi di D_{36} è in relazione 6?

(b) Determinare tutti i maggioranti e tutti i minoranti di S in D_{36}.
(c) Determinare, se esistono, $\inf(S)$, $\sup(S)$, $max(S)$, $min(S)$.

10. Sia X un insieme e siano R_1 e R_2 due relazioni di equivalenza su X.
    (a) Dimostrare che $R_1 \cap R_2$ è una relazione di equivalenza.
    (b) Descrivere la partizione di X associata alla relazione $R_1 \cap R_2$ in termini di quelle associate a R_1 e R_2.
    (c) Esibire un esempio di R_1 e R_2 tali che $R_1 \cup R_2$ non è una relazione di equivalenza.

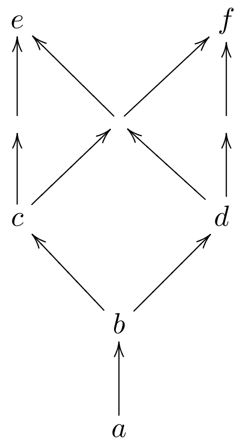
11. Sia X un insieme e siano S_1 e S_2 due relazioni di ordine su X.
    (a) È vero che $S_1 \cap S_2$ è una relazione di ordine? Dimostrarlo o esibire un controesempio.
    (b) È vero che $S_1 \cup S_2$ è una relazione di ordine? Dimostrarlo o esibire un controesempio.

12. Sia $X = \{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}$ con l'ordinamento rappresentato dal diagramma di Hasse qui sotto. Di quale ordinamento si tratta?



    (a) Determinare tutti i maggioranti e tutti i minoranti di 12.
    (b) Determinare tutti i maggioranti e tutti i minoranti di 6.
    (c) Determinare tutti i maggioranti e tutti i minoranti di $S = \{6, 12, 18\}$.
    (d) Determinare $sup(S)$, $inf(S)$ e dire se si tratta di massimo e minimo di S.

13. Siano dati gli insiemi $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ ed $A = \{b, c, d\} \subset X$ con l'ordinamento parziale illustrato dal diagramma di Hasse qui sotto:



Determinare l'insieme dei maggioranti di A in X. Esiste il $sup(A)$? Giustificare bene la risposta.