Algebra e Logica 2011. Esercizi 3. Relazioni e relazioni di equivalenza.

1. Siano dati gli insiemi $A = \{x, y, z, w\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e sia data la relazione

$$R = \{(x, 1), (x, 3), (x, 5), (y, 2), (y, 3), (z, 1), (z, 5), (w, 2), (w, 3)\}.$$

   (a) Esiste un elemento di A che non è in relazione con alcun elemento di B?
   (b) Quanti elementi di A sono in relazione con $2 \in B$? Quanti elementi di A sono in relazione con $6 \in B$?
   (c) Determinare se R è la relazione individuata da una funzione $f \colon A \to B$. Spiegare bene la risposta.

2. Siano dati gli insiemi $A = \{x, y, z, u, w\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e sia data la relazione

$$R = \{(x, 1), (y, 3), (z, 5), (u, 4), (w, 5)\}.$$

   (a) Verificare che R è la relazione individuata da una funzione $f \colon A \to B$. Spiegare bene la risposta e determinare esplicitamente f.
   (b) Determinare se f è iniettiva.
   (c) Determinare se f è suriettiva.

3. Sia $A = \{x, y, z, u, w\}$ e sia R la relazione su data da

$$R = \{(x, x), (y, y), (z, z), (u, u), (w, w), (x, y), (y, x), (x, z), (y, z), (z, y), (z, x), (y, w), (w, y)(x, w), (w, x)\}.$$

   (a) Determinare se R è riflessiva.
   (b) Determinare se R è simmetrica.
   (c) Determinare se R è transitiva.

4. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Consideriamo su $\mathcal{P}(X)$ la seguente relazione:
   dati $A, B \in \mathcal{P}(X)$, definiamo ARB se $A \cap B^c = \emptyset$, dove B^c indica il complementare di B in X.
   (a) Determinare se R è riflessiva.
   (b) Determinare se R è simmetrica.
   (c) Determinare se R è antisimmetrica.
   (d) Determinare se R è transitiva.
   (e) Verificare che $A \cap B^c = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$.

5. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Consideriamo su $\mathcal{P}(X)$ la seguente relazione:
   dati $A, B \in \mathcal{P}(X)$, definiamo ARB se $A \cup B \neq \emptyset$.
   (a) Determinare se R è riflessiva.
   (b) Determinare se R è simmetrica.
   (c) Determinare se R è antisimmetrica.
   (d) Determinare se R è transitiva.

6. Sia $X = \{a, b, c, d\}$ un insieme di 4 elementi. In $\mathcal{P}(X)$ consideriamo la seguente relazione ARB se $|A| = |B|$ (cioè se A e B hanno la stessa cardinalità).
   (a) Verificare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Determinare le classi di equivalenza, elencandone gli elementi.
   (c) Verificare che le classi di equivalenza determinano una partizione di $\mathcal{P}(X)$.

7. Consideriamo la seguente relazione su $\mathbf{Z}$:

$$m, n \in \mathbf{Z}, \quad mRn \quad \text{se} \quad m - n = 4k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

(a) Verificare che si tratta di una relazione di equivalenza.
(b) Determinare le classi di equivalenza, elencandone gli elementi.
(c) Verificare che le classi di equivalenza determinano una partizione di $\mathbf{Z}$.

8. Sia $A = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 x_2 \neq 0\}$. Dati $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ in A, diciamo che $X\,R\,Y$ se $x_1 y_1 > 0$ e $x_2 y_2 > 0$.
(a) Verificare che R è una relazione di equivalenza.
(b) Descrivere le classi di equivalenza di A e determinare quante sono. Esibire un elemento di ogni classe.
(c) Rispondere alle domande (a) e (b), quando R è la relazione data da: $X\,R\,Y$ se $x_1 y_1 > 0$ e $x_2 = y_2$.

9. Sull'insieme $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 23, 33, 35, 42, 45\}$ si consideri la relazione data da "$a\ R\ b$ se a e b hanno la somma delle cifre uguale".
(a) Verificare che R è una relazione di equivalenza.
(b) Determinare le classi di equivalenza (elencandone gli elementi).

10. Sia $A = \{n \in \mathbf{N} \mid 1 \leq n \leq 5\} \times \{n \in \mathbf{N} \mid 1 \leq n \leq 5\}$ e sia $R = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A : ad = bc\}$.
(a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
(b) Determinare le classi di equivalenza di R, elencandone gli elementi. Verificare che formano una partizione di A.
(c) Sia $\tilde{A} =$ l'insieme delle classi di equivalenza di R. Dimostrare che la mappa $f : \tilde{A} \longrightarrow \mathbf{Q}_{>0}$ che associa la frazione a/b alla classe di (a, b), è ben definita (cioè tutti gli elementi della stessa classe di equivalenza hanno la stessa immagine). Determinare l'immagine $f(A)$.

11. Sia $X = \{(1, 2, 0), (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 3, 0), (2, 1, 1), (4, 1, 1), (3, 3, 3)\}$ con la relazione data da $(x, y, z)R(r, s, t)$ se $x + y + z = r + s + t)$.
(a) Verificare che si tratta di una relazione di equivalenza.
(b) Determinare le classi di equivalenza enumerandone gli elementi.
(c) Verificare che determinano una partizione di X.