

1. In un'algebra Booleana $(B, +, \cdot, ')$ siano date le espressioni booleane

$$E : (x + y)z' + xz \quad F : xy' + xyz.$$

- (a) A quali espressioni corrispondono nell'algebra di Boole del calcolo proposizionale?
 (b) Sono logicamente equivalenti?
2. Sia $(\mathcal{P}, \wedge, \vee, \neg)$ l'algebra di Boole del calcolo proposizionale. Enunciare i seguenti fatti:
 - le operazioni \wedge, \vee sono *associative*;
 - le operazioni \wedge, \vee hanno la *proprietà dell'assorbimento*;
 - le operazioni \wedge, \vee hanno la *proprietà dell'idempotenza*.
3. Considerare su $(\mathcal{P}, \wedge, \vee, \neg)$ la seguente relazione:

$$A \text{ "}\leq\text{" } B \text{ se } A \Rightarrow B.$$

- (a) Verificare che $A \text{ "}\leq\text{" } B$ è logicamente equivalente a $A \wedge B \Leftrightarrow A$ ed a $A \vee B \Leftrightarrow B$.
 (b) Dati $A, B \in \mathcal{P}$, chi sono $\sup\{A, B\}$ ed $\inf\{A, B\}$?
 (c) Verificare che la tautologia \mathcal{T} e la contraddizione \mathcal{C} sono rispettivamente massimo e minimo in \mathcal{P} .
4. Siano X, Y e Z insiemi. Siano dati gli enunciati

$$A : \text{"}x \in X\text{"}, \quad B : \text{"}x \in Y\text{"}, \quad C : \text{"}x \in Z\text{"}.$$

- (a) Combinando A, B, C mediante gli operatori logici \wedge, \vee, \neg esprimere i seguenti fatti:
 $x \notin X$; $x \in Y \cup Z$; $x \notin Y \cup Z$; $x \in X \cap Y \cap Z$; $x \in X \setminus Y \cap Z$; $x \notin X \cap Y$;
 $x \in X \cap (Y \cup Z)$; $x \in X \cup (Y \cap Z)$; $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; $x \in (X \setminus Y) \cap (X \cap Z)$.
- (b) Cosa dicono su x gli enunciati
 $\neg A \wedge B$; $A \wedge (B \vee \neg C)$; $\neg(A \vee (B \wedge C))$; $A \vee \neg(B \wedge C)$; $\neg(A \vee B) \vee (A \vee B)$??
 Illustrare i vari casi con dei disegni.
5. Determinare la tavola della verità di ciascuna delle seguenti forme proposizionali:
 (a) $p \wedge (\neg q \vee q)$; (b) $\neg p \vee (q \Rightarrow p)$; (c) $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \wedge r)$;
 (d) $(p \vee q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$; (e) $(p \Leftrightarrow q) \vee (\neg q \vee p)$; (f) $\neg(p \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$;
6. È vero che dati tre insiemi A, B, C vale l'implicazione $\begin{cases} A \cup C = B \cup C \\ A \cap C = B \cap C \end{cases} \Rightarrow A = B$??
 Dimostrarlo o esibire un controesempio.
7. Verificare che $\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee r) \vee \neg(\neg r \vee p) \vee (\neg s \vee p)$ è una tautologia. Se consideriamo l'espressione booleana corrispondente nell'algebra di Boole $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ e la semplifichiamo, cosa troviamo alla fine?
8. Sia dato l'enunciato $\mathcal{A} : (A \vee B) \wedge \neg B$, per $A, B \in \{V, F\}$.
 (a) Usando i quantificatori \forall, \exists esprimere il seguente fatto:
 "A non è né una tautologia né una contraddizione".
 (b) Scrivere la sua negazione.
 (c) Usare la tabella di verità di \mathcal{A} per controllare quale dei due enunciati è vero.

9. Siano x, y variabili *reali non negative*. Per ognuno dei seguenti enunciati: scrivere cosa vuol dire “a parole”, determinare se è vero o falso e scriverne la negazione (non ci devono essere negazioni davanti ai quantificatori). Giustificare bene le risposte con esempi numerici.

- (a) $\exists x ((x^2 < 10) \wedge (|3 - x| > 2))$;
- (b) $\forall x ((x \neq 4) \Rightarrow (x - 5 > 1))$;
- (c) $\forall x \exists y (x + y = 0)$;
- (d) $\exists x \forall y (xy = 0)$;

10. Siano x, y variabili *interi*. Sia $Q(x, y)$ l'enunciato “ $x + y = x - y$ ”.

Per ognuno dei seguenti enunciati: scrivere cosa vuol dire “a parole”, determinare se è vero o falso e scriverne la negazione (non ci devono essere negazioni davanti ai quantificatori). Giustificare bene le risposte con esempi numerici.

- (a) $\forall y Q(1, y)$;
- (b) $\exists x \exists y Q(x, y)$;
- (c) $\forall y \exists x Q(x, y)$;
- (d) $\exists x \forall y Q(x, y)$;
- (e) $\exists y \forall x Q(x, y)$;

11. Sia dato l'enunciato

$$\text{Siano } A, B, C \text{ insiemi. } \forall A, B, C : A \cap B \neq \emptyset \wedge B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow A \cap C \neq \emptyset.$$

- (a) Determinare se è vero o falso.
- (b) Scrivere la sua negazione.
- (c) Se è vero dimostrarlo; se è falso dimostrare che è vera la sua negazione, ed esibire un controesempio esplicito.

12. Sia dato l'enunciato

$$\text{Siano } A, B, C \text{ insiemi. } \forall C : (A \cap C = B \cap C) \wedge (A \cup C = B \cup C) \Rightarrow A = B.$$

- (a) Determinare se è vero o falso.
- (b) Scrivere la sua negazione.
- (c) Se è vero dimostrarlo; se è falso dimostrare che è vera la sua negazione (esibire un controesempio esplicito).