

**Alcuni di questi esercizi sono stati fatti in classe: rifarli a libro chiuso.**

1. Sia  $X$  un insieme e sia  $\mathcal{P}(X)$  l'insieme delle parti di  $X$ . Indichiamo con  $\cap, \cup$  e  $\bar{\phantom{x}}$  rispettivamente le operazioni di *intersezione*, *unione* e *complementare* in  $\mathcal{P}(X)$ .
  - (i) Verificare che  $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, \bar{\phantom{x}})$  è un'algebra di Boole (verificare che sono soddisfatti gli assiomi).
  - (ii) Enunciare e dimostrare le leggi di idempotenza.
  - (iii) Enunciare e dimostrare le leggi di assorbimento.
  - (iv) Enunciare e dimostrare le leggi di De Morgan.

2. Dato un numero naturale  $n$ , si denoti  $\mathbf{D}_n = \{m \in \mathbf{N} : m \text{ divide } n\}$ . Supponiamo che  $n = p_1 p_2 \cdots p_k$  sia prodotto di  $k$  primi *distinti*. Dato  $a \in \mathbf{D}_n$ , si definisca  $\bar{a} := \frac{n}{a}$ .
  - (i) Verificare che  $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, \bar{\phantom{x}})$  è un'algebra di Boole con  $2^k$  elementi.
  - (ii) Enunciare le leggi di idempotenza in  $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, \bar{\phantom{x}})$ .
  - (iii) Enunciare le leggi di assorbimento in  $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, \bar{\phantom{x}})$ .
  - (iv) Enunciare le leggi di De Morgan in  $(\mathbf{D}_n, mcd, mcm, \bar{\phantom{x}})$ .
  - (v) Sia  $X = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ . Verificare che l'applicazione

$$f: \mathbf{D}_n \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad k = p_{i_1} \cdots p_{i_\alpha} \mapsto \{p_{i_1}, \dots, p_{i_\alpha}\}$$

è un isomorfismo di algebre di Boole (ossia un'applicazione biiettiva che rispetta le operazioni delle due algebre o equivalentemente che rispetta le rispettive relazioni di ordine. Cominciare magari coi casi  $k = 2$  e  $k = 3$ ).

3. Sia dato l'insieme  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$  con le operazioni  $\oplus, \otimes$  e  $\bar{\phantom{x}}$  definite nel seguente modo:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 1,$$

$$1 \otimes 1 = 1, \quad 1 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 0 \otimes 0 = 0, \quad \bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0.$$

Dimostrare che  $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, \bar{\phantom{x}})$  è un'algebra Booleana (verificare che soddisfa gli assiomi).

4. Sia dato l'insieme  $\mathcal{A} = \{000, 010, 001, 100, 110, 101, 011, 111\}$  con le operazioni definite cifra per cifra come nell'esercizio precedente
  - (a) Qual è l'identità per  $\oplus$ ?
  - (b) Qual è l'identità per  $\otimes$ ?
  - (c) Calcolare le seguenti espressioni:

$$\overline{(001 \otimes 001)} \oplus 100, \quad (111 \otimes 001 \otimes 111) \oplus \overline{100}, \quad (001 \otimes \overline{001}) \otimes \overline{101} \otimes 010 \quad \overline{\overline{101}}.$$

- (d) Dimostrare che  $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, \bar{\phantom{x}})$  è un'algebra Booleana (verificare che soddisfa gli assiomi).
- (e) Un'algebra di Boole, con le stesse operazioni, è anche un reticolo Booleano. Determinare la relazione di ordine parziale corrispondente, definita da  $x \leq y$  se  $x \otimes y = x$  (o equivalentemente mediante  $x \leq y$  se  $x \oplus y = y$ ).
- (f) Enunciare le leggi di idempotenza.
- (g) Enunciare le leggi di assorbimento.
- (h) Enunciare le leggi di De Morgan.

5. Sia  $\mathcal{B}$  l'insieme dei sottoinsiemi  $B \subset \mathbf{N}$  che soddisfano una delle seguenti condizioni: la cardinalità di  $B$  è finita oppure la cardinalità del complementare di  $B$  è finita. Dimostrare che  $(\mathcal{B}, \cap, \cup, \bar{\phantom{x}})$  è un'algebra di Boole.