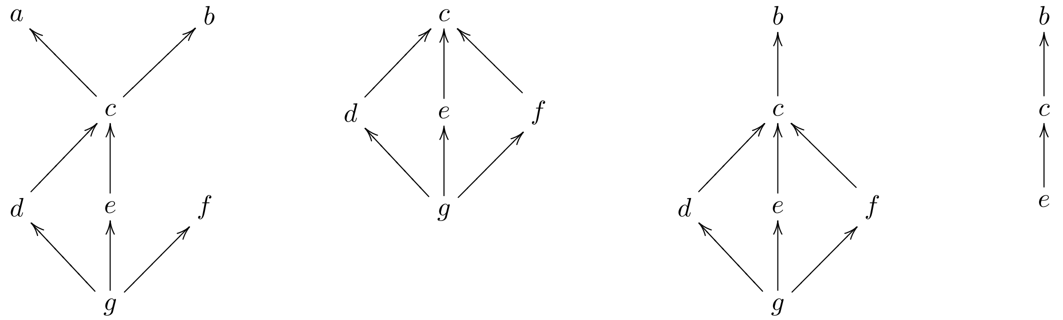
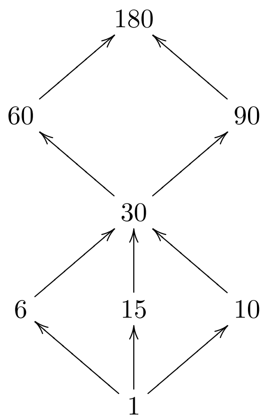
Algebra e Logica 2011. Esercizi 10. Reticoli.

1. Quali dei seguenti insiemi parzialmente ordinati sono reticoli e quali no (spiegare bene le risposte):




2. Sia $X = \{a, b, c, d\}$. Sia $S = \{\{a, b\}, \{b\}, \emptyset, \{c, d\}, X\}$ l'insieme ordinato mediante la relazione di contenenza $\subset$. Disegnare il diagramma di Hasse corrispondente. Richiamare la definizione di reticolo. Determinare se $S$ è un reticolo.
3. Sia $X = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 63\}$ l'insieme ordinato mediante la relazione di divisibilità. Disegnare il diagramma di Hasse corrispondente. Richiamare la definizione di reticolo. Determinare se $X$ è un reticolo.
4. Si consideri il reticolo $L = \{1, 6, 10, 15, 30, 60, 90, 180\}$ con la relazione di ordine data dalla divisibilità, e munito delle operazioni di $inf$ e $sup$ indotte da tale relazione, per semplicità indicate con $a \wedge b = inf(a, b)$ e $a \vee b = sup(a, b)$ .




Il reticolo $L$.

(a) Calcolare

$$60 \wedge 90 \wedge 15, \qquad 60 \wedge (90 \vee 15), \qquad 6 \vee (15 \wedge 30), \qquad (6 \wedge 15) \bigvee (10 \wedge 60).$$

(b) Verificare che si tratta di un reticolo limitato, specificando chi sono massimo e minimo.

(c) Determinare se è un reticolo complementato, specificando quali elementi hanno complemento, se tale complemento è unico, ed eventualmente quali elementi non hanno complemento.

(d) Determinare, se ci sono, terne di elementi $a, b, c \in L$ e $l, m, n \in L$ per cui

$$a \vee (b \wedge c) \neq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \qquad l \wedge (m \vee n) \neq (l \wedge m) \vee (l \wedge n).$$

(e) Sia $S = \{10, 15, 30, 60\} \subset L$. Determinare l'insieme dei maggioranti di $S$ in $L$ e determinare se $S$ ha $sup$ in $L$. Se si', determinare se si tratta di un massimo.

(f) Determinare l'insieme dei minoranti di $S$ in $L$ e determinare se $S$ ha $inf$ in $L$. Se si', determinare se si tratta di un minimo.

5. Sia $X$ un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di $X$.
   (a) Dimostrare che le operazioni di reticolo hanno la proprietà dell'assorbimento.
   (b) Dimostrare che per le operazioni di reticolo vale l'idempotenza.
   (c) Dimostrare che le operazioni di reticolo sono distributive.
6. Sia $(\mathbf{N}, \mid)$ l'insieme dei numeri naturali con la relazione di ordine parziale data dalla divisibilità.
   (a) Verificare che si tratta di un reticolo.
   (b) Dire se si tratta o meno di un reticolo limitato, complementato, distibutivo (spiegare bene le risposte).
   (c) Cosa possiamo dire di $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \subset)$? Spiegare bene.
7. Siano $2 \leq p < q < r$ numeri primi distinti. Si considerino i seguenti insiemi con l'ordinamento parziale dato dalla divisibilità:

$$(D_{pqr}, \mid) \qquad (D_{p^2r}, \mid) \qquad (D_{p^2q^2}, \mid) \qquad (D_{pqr^2}, \mid).$$

   (a) Disegnare i corrispondenti diagrammi di Hasse.
   (b) Dire quali fra essi sono reticoli limitati, complementati e distributivi, spiegando bene le risposte.
   (c) Costruire un esempio concreto di ognuna delle quattro situazioni e rifare quanto fatto sopra.

**Questi ultimi esercizi riguardano la prima parte della lezione di mercoledì 21 dicembre.**

8. Siano dati i reticoli

$$(\mathcal{P}(\{a,b\}), \subset), \qquad (D_{14}, \mid), \qquad (D_{70}, \mid), \qquad (\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subset).$$

   Determinare quali di essi sono isomorfi. Nel caso in cui due reticoli siano isomorfi, determinare tutti i possibili isomorfismi.
9. Siano dati i reticoli

$$(D_{30}, \mid), \qquad (D_{20}, \mid), \qquad (D_{18}, \mid), \qquad (\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subset), \qquad (D_{105}, \mid).$$

   Determinare quali di essi sono isomorfi. Nel caso in cui due reticoli siano isomorfi, determinare tutti i possibili isomorfismi.