ESERCIZI SU

RETICOLI, ALGEBRE DI BOOLE

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

1 — Siano L, L_1, L_2 e L_3 dei morfismi. Dimostrare che:

(a) l'applicazione identità id_L è un isomorfismo di reticoli (da L ad L);

(b) se $L_1 \xrightarrow{\ \phi\ } L_2$ è un isomorfismo, allora la funzione inversa $L_2 \xrightarrow{\ \phi^{-1}\ } L_1$ è a sua volta un isomorfismo;

(c) se $L_1 \xrightarrow{\ \phi\ } L_2$ e $L_2 \xrightarrow{\ \psi\ } L_3$ sono isomorfismi, allora anche la composizione $L_1 \xrightarrow{\ \psi\circ\phi\ } L_3$ è a sua volta un isomorfismo.

2 — Sia $\phi : \widetilde{L} \longrightarrow \widehat{L}$ un isomorfismo di reticoli. Dimostrare che:

(a) se esiste $\widetilde{0} := \min\big(\widetilde{L}\,\big)$, allora esiste anche $\widehat{0} := \min\big(\widehat{L}\,\big)$ e si ha $\phi\big(\,\widetilde{0}\,\big) = \widehat{0}$;

(b) se esiste $\widetilde{1} := \min\big(\widetilde{L}\,\big)$, allora esiste anche $\widehat{1} := \max\big(\widehat{L}\,\big)$ e si ha $\phi\big(\,\widetilde{1}\,\big) = \widehat{1}$;

(c) se $\widetilde{L}$ e $\widehat{L}$ sono limitati, $\widetilde{\ell} \in \widetilde{L}$ e $\widehat{\ell} := \phi\big(\,\widetilde{\ell}\,\big) \in \widehat{L}$, allora $\widetilde{\ell}$ ha complemento in $\widetilde{L}$ se esoltanto se $\widetilde{\ell}$ ha complemento in $\widetilde{L}$, e precisamente $\widetilde{\lambda} \in \widetilde{L}$ è complemento di $\widetilde{\ell}$ (in $\widetilde{L}$) se e soltanto se $\widehat{\lambda} := \phi\big(\,\widetilde{\lambda}\,\big) \in \widehat{L}$ è complemento di $\widehat{\ell} := \phi\big(\,\widetilde{\ell}\,\big)$ (in $\widehat{L}$).

3 — Sia $\phi : L_1 \longrightarrow L_2$ un isomorfismo di reticoli, e siano

$$\mathit{Rid}(L_i) := \big\{\, \ell \in L_i \,\big|\, \ell \text{ è } \vee\text{–riducibile} \,\big\}\ , \quad \mathit{Irr}(L_i) := \big\{\, \ell \in L_i \,\big|\, \ell \text{ è } \vee\text{–irriducibile} \,\big\} \qquad \forall\ i \in \{1,2\}$$

Inoltre, se esistono $0_1 := \min\big(L_1\big)$ e $0_2 := \min\big(L_2\big)$ siano $\mathit{Atm}(L_i) := \big\{\text{ atomi di } L_i \,\big\}$ per $i \in \{1,2\}$. Dimostrare che:

(a) ϕ induce (tramite restrizione) una biiezione da $\mathit{Rid}(L_1)$ a $\mathit{Rid}(L_2)$;

(b) ϕ induce (tramite restrizione) una biiezione da $\mathit{Irr}(L_1)$ a $\mathit{Irr}(L_2)$;

(c) ϕ induce (tramite restrizione) una biiezione da $\mathit{Atm}(L_1)$ a $\mathit{Atm}(L_2)$.

4 — Sia E un insieme ordinato limitato in cui la relazione d'ordine sia *totale*. Dimostrare che:

(a) E è un reticolo distributivo (e limitato);

(b) E è un'algebra di Boole se e soltanto se $\big|E\big| \leq 2$.

5 — Per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, sia D_n l'usuale reticolo dei divisori di n. Dimostrare che D_n è un'algebra di Boole se e soltanto se n si fattorizza in $n = p_1 p_2 \cdots p_s$ con $p_1,\, p_2,\, \dots,\, p_s$ primi a due a due distinti.

6 — Siano X un insieme non vuoto, L un reticolo, e L^X il corrispondente insieme di tutte le funzioni da X ad L, con la sua struttura naturale di reticolo.

(a) Si determinino tutti gli elementi $\vee$–*irriducibili* di L^X .

(b) Supponendo che esista $0 := \min(L)$, si determinino tutti gli *atomi* di L^X .

7 — Consideriamo in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{N}_+$ la relazione δ di *divisibilità*, per cui scriveremo

$$\ell\,\delta\, n \iff \ell \text{ divide } n \quad , \qquad \ell \not\delta\, n \iff \ell \textit{ non} \text{ divide } n$$

Inoltre, per ogni $r \in \mathbb{N}_+$, definiamo i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ seguenti:

$$\mathbb{N}_+^{\delta;r} \;:=\; \big\{\, n \in \mathbb{N}_+ \,\big|\, \forall \text{ primo } p \,,\; p^r \not\delta\, n \,\big\} \quad , \quad \mathbb{N}^{\delta;r} \;:=\; \mathbb{N}_+^{\delta;r} \cup \{0\}$$

Dimostrare che:

(a) $\mathbb{N}_+^{\delta;r}$ è sottoreticolo del reticolo $\big(\mathbb{N}_+\,;\,\delta\big)$ dei numeri naturali positivi ordinati con la relazione (d'ordine) δ di *divisibilità*;

(b) $\mathbb{N}^{\delta;r}$ è sottoreticolo del reticolo $\big(\mathbb{N}\,;\,\delta\big)$ dei numeri naturali ordinati con la relazione (d'ordine) δ di *divisibilità*;

(c) $\mathbb{N}_+^{\delta;r}$ è sottoreticolo del reticolo $\mathbb{N}^{\delta;r}$.

8 — Per ogni $r \in \mathbb{N}_+$, definiamo i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ seguenti (notazione come sopra):

$$\mathbb{N}_+^{r;\delta} \;:=\; \big\{\, n \in \mathbb{N}_+ \,\big|\, \forall \text{ primo } p \,,\; p\,\delta\, n \Longrightarrow p^r\,\delta\, n \,\big\} \quad , \quad \mathbb{N}^{\delta;r} \;:=\; \mathbb{N}_+^{\delta;r} \cup \{0\}$$

Dimostrare che:

(a) $\mathbb{N}_+^{r;\delta}$ è sottoreticolo del reticolo $\big(\mathbb{N}_+\,;\,\delta\big)$ dei numeri naturali positivi ordinati con la relazione (d'ordine) δ di *divisibilità*;

(b) $\mathbb{N}^{r;\delta}$ è sottoreticolo del reticolo $\big(\mathbb{N}\,;\,\delta\big)$ dei numeri naturali ordinati con la relazione (d'ordine) δ di *divisibilità*;

(c) $\mathbb{N}_+^{r;\delta}$ è sottoreticolo del reticolo $\mathbb{N}^{r;\delta}$.

9 — Si descrivano — quando esistano — tutti gli isomorfismi esistenti tra le seguenti coppie di reticoli: $\big(D_{15}\,,D_{21}\big)$, $\big(D_{15}\,,D_{20}\big)$, $\big(D_{45}\,,D_{28}\big)$, $\big(D_{51}\,,D_{53}\big)$, $\big(D_{180}\,,D_{588}\big)$, $\big(D_{45}\,,\mathbb{N}_+^{\delta}\big)$, $\big(D_{51}\,,\mathbb{N}_+^{\delta}\big)$, $\big(D_{51}\,,\mathbb{N}^{\delta}\big)$, $\big(\mathbb{N}^{\delta},\mathbb{N}_+^{\delta}\big)$, $\big(\mathbb{N}_+^{\delta;2},\mathbb{N}^{\delta;2}\big)$, $\big(\mathbb{N}_+^{\delta;2},\mathbb{N}_+^{\delta}\big)$, $\big(\mathbb{N}_+^{\delta;r},\mathbb{N}_+^{\delta;s}\big)$, $\big(\mathbb{N}_+^{\delta;r},\mathbb{N}_+^{s;\delta}\big)$, $\big(\mathbb{N}_+^{r;\delta},\mathbb{N}_+^{s;\delta}\big)$.

10 — Nei reticoli (limitati) D_{60} e D_{72} si determinino esplicitamente tutti gli elementi $\vee$–irriducibili e tutti gli atomi.

11 — Spiegare quali tra i seguenti reticoli siano algebre di Boole: D_{27} , $\mathcal{P}\big(\{S, P, Q, R\}\big)$, D_{19} , D_{20} , D_{21} , $D_6 \times D_4$, $D_{10} \times D_5$, D_{50} , D_{51} , D_{104} , D_{105} , D_{16} , $D_4 \times D_4$, $D_2 \times D_8$, $D_2 \times D_2 \times D_2 \times D_2$.

12 — Per ciascuna delle due algebre di Boole D_{30} e D_{105} si descrivano esplicitamente l'insieme degli atomi e l'isomorfismo (di algebre di Boole) fornito dal *Teorema di Stone*.