ESERCIZI SU

INSIEMI, FUNZIONI, RELAZIONI

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

1 — Dati tre insiemi A, B e C, dimostrare che valgono le seguenti identità:

(a) $$A \cap (B \cup C) \,=\, (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(b) $$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \,=\, (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

(c) $$A \oplus (B \oplus C) \,=\, (A \oplus B) \oplus C$$

Suggerimento: si cominci col cercare una descrizione dell'insieme $A \oplus (B \oplus C)$ esclusivamente in termini delle operazioni $\cup$, $\cap$ e $\setminus$, e analogamente per l'insieme $(A \oplus B) \oplus C$ ...

2 — Siano $A \xrightarrow{f} B$ e $B \xrightarrow{\ell} C$ due funzioni. Dimostrare che:

(a) se f e ℓ sono iniettive, allora anche la composizione $\ell \circ f$ è iniettiva;

(b) se la composizione $\ell \circ f$ è iniettiva, allora anche f è iniettiva (mentre invece ℓ, in generale, può *non* esserlo);

(c) se f e ℓ sono suriettive, allora anche la composizione $\ell \circ f$ è suriettiva;

(d) se la composizione $\ell \circ f$ è suriettiva, allora anche ℓ è suriettiva (mentre invece f, in generale, può *non* esserlo).

3 — Sia E l'insieme $E := \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$. Si descrivano esplicitamente:

(a) l'insieme $\mathcal{P}(E)$ delle parti di E;

(b) l'insieme $\underline{2}^E$ delle funzioni caratteristiche di E;

(c) le funzioni biunivoche $\mathcal{P}(E) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \underline{2}^E$ e $\underline{2}^E \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{P}(E)$, inverse l'una dell'altra, canonicamente associate agli insiemi $\mathcal{P}(E)$ e $\underline{2}^E$.

4 — Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi. Per ogni $c \in \mathbb{Z}$, sia $f_c : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $f_c(x) := x - c\,x + c$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}$. Determinare, motivando la risposta, per quali valori di c la f_c è iniettiva, suriettiva, e/o biunivoca.

5 — Sia S l'insieme degli stati della Terra, e sia κ la relazione di "confinanza" in S, data da $s_1 \kappa s_2 \stackrel{\Delta}{\Longleftrightarrow} s_1$ *confina con* s_2 $\big(\forall\, s_1, s_2 \in S\big)$, dove "confina con" significa "ha un parte non vuota dei suoi confini (per terra o per mare) in comune con". Verificare che la relazione di confinanza è *riflessiva* e *simmetrica*, ma *non transitiva*.

6 — Sia M l'insieme delle montagne della Terra, e sia $\succ$ la relazione in S, data da $m_1 \succ m_2 \stackrel{\Delta}{\Longleftrightarrow} m_1$ *è più alta di* m_2 $\big(\forall\, m_1, m_2 \in M\big)$. Verificare che la relazione $\succ$ è *transitiva*, ma *non riflessiva*, *né simmetrica*, *né antisimmetrica*.

7 — Sia M l'insieme delle montagne della Terra, e sia $\succeq$ la relazione in S, data da $m_1 \succeq m_2 \stackrel{\Delta}{\Longleftrightarrow} m_1$ *è alta almeno quanto* m_2 $\big(\forall\, m_1, m_2 \in M\big)$. Verificare che la relazione $\succeq$ è *transitiva* e *riflessiva* — dunque è un *preordine* — ma *non simmetrica*, *né antisimmetrica*.

8 — Sia P l'insieme delle persone viventi (adesso), e sia π la relazione di "parentela" in P, data da $p_1 \pi p_2 \stackrel{\Delta}{\Longleftrightarrow} p_1$ *ha un antenato in comune con* p_2 $\big(\forall\, p_1, p_2 \in P\big)$. Verificare che la relazione π è *riflessiva* e *simmetrica*, ma *non transitiva*, *né antisimmetrica*.

9 — Sia $\big|$ la relazione di "divisibilità" nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, definita da $n' \,\big|\, n'' \stackrel{\Delta}{\Longleftrightarrow} \exists\; d \in \mathbb{N} : d n' = n''$ $\big(\forall\, n', n'' \in \mathbb{N}\big)$. Dimostrare che $\big|$ è una relazione di *ordine* (cioè è riflessiva, antisimmetrica e transitiva), ma tale ordine è *non totale*, cioè esistono $n', n'' \in \mathbb{N}$ tali che $n' \nmid n''$ e $n'' \nmid n'$.

10 — Sia $\big|$ la relazione di "divisibilità" nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, definita da $z' \,\big|\, z'' \stackrel{\Delta}{\Longleftrightarrow} \exists\; d \in \mathbb{Z} : d z' = z''$ $\big(\forall\, z', z'' \in \mathbb{Z}\big)$. Dimostrare che $\big|$ è una relazione di *preordine* (cioè è riflessiva e transitiva) ma non di ordine (cioè non è anche antisimmetrica).

11 — Sia $\vdash$ una relazione in un insieme $E \neq \emptyset$ che sia un "preordine", cioè sia riflessiva e transitiva. Dimostrare che la relazione σ in E definita da $a \,\sigma\, b \stackrel{\Delta}{\Longleftrightarrow} (a \vdash b) \wedge (b \vdash a)$ $(\forall\, a, b \in E)$ è un'equivalenza in E, e descriverne le singole classi di equivalenza.

12 — Applicare l'esercizio 11 al caso specifico in cui $E := \mathbb{Z}$ e $\sigma := \big|$ (la relazione di "divisibilità" in $\mathbb{Z}$).

13 — Sia $\preceq$ una relazione in un insieme E, e sia $\succeq \, := \, \preceq^{-1}$ la relazione inversa (sempre in E). Dimostrare che:

(a) se $\preceq$ è un(a relazione di) preordine, allora anche $\succeq$ è un(a relazione di) preordine;

(b) se $\preceq$ è un(a relazione di) ordine, allora anche $\succeq$ è un(a relazione di) ordine;

(c) se $\preceq$ è un(a relazione di) ordine totale, allora anche $\succeq$ è un(a relazione di) ordine totale.

14 — Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali. Sia λ la relazione in $\mathbb{Q}$ definita da

$$n \, \lambda \, m \quad \overset{\Delta}{\iff} \quad n^2 - 3\,m + 7 \, = \, m^2 - 3\,n + 7 \qquad\qquad \forall \;\, n, m \in \mathbb{Q}$$

Determinare se λ è una relazione di equivalenza. In caso negativo, si spieghi quale/i proprietà di una relazione di equivalenza non è/sono valide per λ; in caso affermativo, si descrivano le classi di equivalenza di λ (come sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$) e l'insieme quoziente $\mathbb{Q}/\lambda$ (cioè si determini una biiezione tra tale insieme quoziente ed un insieme già noto).

15 — Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali. Nell'insieme $E := (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{(1,0)\}$ si definisca una relazione μ ponendo $\big($per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{(1,0)\}\big)$

$$(x_1, y_1) \; \mu \; (x_2, y_2) \quad \overset{\Delta}{\iff} \quad y_1\, x_2 - y_1 + y_2 - x_1\, y_2 = 0$$

Determinare se μ è una relazione di equivalenza. In caso negativo, si spieghi quale/i proprietà di una relazione di equivalenza non è/sono valide per μ; in caso affermativo, si descrivano le classi di equivalenza di μ e l'insieme quoziente E/μ.

16 — Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione tra insiemi, e sia ω una relazione in Y, e sia ω_f la relazione in X definita da $\;x' \, \omega_f \, x'' \overset{\Delta}{\iff} f(x') \; \omega \; f(x'')$, per ogni $x', x'' \in X$. Dimostrare che valgono le seguenti implicazioni tra proprietà di ω e proprietà di ω_f:

(a) se ω è riflessiva (in Y), allora anche ω_f è riflessiva (in X);

(b) se ω è simmetrica (in Y), allora anche ω_f è simmetrica (in X);

(c) se ω è transitiva (in Y), allora anche ω_f è transitiva (in X);

(d) se ω è antisimmetrica (in Y), allora ω_f è antisimmetrica (in X) *se e soltanto se* la funzione f è iniettiva.

17 — Sia $E \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ l'insieme dei numeri interi, o dei numeri razionali, o dei numeri reali, e sia α la relazione in E data da $\;e' \, \alpha \, e'' \overset{\Delta}{\iff} \big(e' = e''$ oppure $e' = -e''\big)$, per ogni $e', e'' \in E$. Per ciascuno dei tre casi ($E = \mathbb{Z}$, oppure $E = \mathbb{Q}$, oppure $E = \mathbb{R}$),

(a) dimostrare che α è un'equivalenza in E,

(b) descrivere esplicitamente ciascuna classe di α–equivalenza in E,

(c) descrivere esplicitamente l'insieme quoziente E/α.