ESERCIZI SU

INDUZIONE, SCRITTURA POSIZIONALE

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

1 — Dimostrare per induzione le seguenti identità:

(a) $\sum_{k=0}^{n} k \; = \; \frac{n\,(n+1)}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\sum_{h=0}^{n} h^2 \; = \; \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(c) $\sum_{t=0}^{n} t^3 \; = \; \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2 — Dimostrare per induzione le seguenti identità:

(a) $\sum_{k=1}^{n}(2\,k-1) \; = \; n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\sum_{h=0}^{n}(4\,h+1) \; = \; (2\,n+1)\,(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

3 — Dimostrare per induzione, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la seguente identità:

$$\sum_{s=0}^{n} s\,(s+1) \; = \; \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}$$

3 — Dimostrare per induzione, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la seguente diseguaglianza:

$$(n-3)^2 \; \lneqq \; n^2+11$$

4 — Dimostrare, per induzione su n, che $3^{2\,n+1}+2^{n+2}$ è multiplo (intero) di 7 (per ogni $n \in \mathbb{N}$).

5 — Dimostrare, facendo induzione su $n := k-h$, che per ogni $h, k \in \mathbb{N}_+$ tali che $h < k$ vale la seguente catena di diseguaglianze (strette):

$$h^2 \; < \; h\,k \; < \; k^2$$

6 — Siano A un insieme e $\underline{2}^A$ il corrispondente insieme delle funzioni caratteristiche in A. Dimostrare per induzione che se A possiede n elementi allora $\underline{2}^A$ possiede 2^n elementi.

7 — Sia A un insieme, e sia $\mathcal{P}(A)$ il corrispondente insieme delle parti di A. Dimostrare per induzione che se A possiede n elementi allora $\mathcal{P}(A)$ possiede 2^n elementi.

8 — Sia $n := (9873)_{10}$, cioè n è il numero naturale che in base dieci è espresso dalla scrittura posizionale $n = (9873)_{10}$. Scrivere n in base otto e in base sette.

Soluzione: $\quad n = (23221)_8 \quad , \quad n = (40533)_7 \quad .$

9 — Convertire in base dieci (cioè riscriverli usando la notazione posizionale in base dieci) i numeri n' e n'' espressi da $n' := (7503)_8$ e $n'' := (40213)_5$ rispettivamente in base otto e in base cinque.

Soluzione: $\quad n' = (3907)_{10} \quad , \quad n'' = (2558)_{10} \quad .$

10 — *Conversioni facili* $\big(b \rightsquigarrow b^r \big)$: Sia n il numero naturale che in base due è espresso dalla scrittura posizionale $n = (1011000110)_2$. Scrivere n in base quattro.

Soluzione: $\quad n = (23012)_4 \quad .$

11 — *Conversioni facili* $\big(b \rightsquigarrow b^r \big)$: Sia n il numero naturale che in base due è espresso dalla scrittura posizionale $n = (11010111011)_2$. Scrivere n in base otto.

Soluzione: $\quad n = (3273)_8 \quad .$

12 — *Conversioni facili* $\big(b^s \rightsquigarrow b \big)$: Sia n il numero naturale che in base quattro è espresso dalla scrittura posizionale $n = (30213)_4$. Scrivere n in base due.

Soluzione: $\quad n = (1100100111)_2 \quad .$

13 — *Conversioni facili* $\big(b^s \rightsquigarrow b \big)$: Sia n il numero naturale che in base otto è espresso dalla scrittura posizionale $n = (73051406)_8$. Scrivere n in base due.

Soluzione: $\quad n = (111011000101001100000110)_2 \quad .$

14 — *Conversioni facili* $\big(b^s \rightsquigarrow b \,\big/\, b \rightsquigarrow b^r \big)$: Sia n il numero naturale che in base otto è espresso dalla scrittura posizionale $n = (2351)_8$. Scrivere n in base due e in base quattro.

Soluzione: $\quad n = (10011101001)_2 \quad , \quad n = (103221)_4 \quad .$

15 — Trovare, se esiste, una base $b \in \mathbb{N}$ con $b > 5$, tale che $(523)_b = (303)_8$.

Soluzione: $b = 6$.

16 — Usando la scrittura posizionale in base cinque, tramite le cinque cifre (ordinate!) 0, 1, 2, 3 e 4, calcolare — senza passare per la scrittura in base dieci — le somme $(1234)_5 + (2321)_5$ e $(3421)_5 + (4023)_5$. Come controprova, risolvere lo stesso problema convertendo prima in base dieci i numeri da sommare, calcolando la somma usando la scrittura posizionale in base dieci, e infine convertire (cioè riscrivere) in base dieci il risultato così ottenuto.

Soluzione: $(1234)_5 + (2321)_5 = (4110)_5$, $(3421)_5 + (4023)_5 = (12444)_5$.

Per la controprova, si ha

$$(1234)_5 + (2321)_5 = (194)_{10} + (336)_{10} = (530)_{10} = (4110)_5 \quad ,$$
$$(3421)_5 + (4023)_5 = (486)_{10} + (513)_{10} = (999)_{10} = (12444)_5 \quad .$$

17 — Usando la scrittura posizionale in base $b =$ dodici, tramite le dodici cifre (ordinate!) dell'insieme $\{0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9, \perp, \wedge\}$, calcolare — *senza* passare per la scrittura in base dieci... — la somma $(70\perp 31\wedge 5)_b + (497\wedge\perp 0\wedge)_b$.

Soluzione: $(70\perp 31\wedge 5)_b + (497\wedge\perp 0\wedge)_b = (\wedge\perp 63004)_b$.