ESERCIZI SU

FUNZIONI (SUCCESSIONI) RICORSIVE

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— $*$ —

1 — Calcolare tutte le successioni ricorsive $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = 1 \;, \quad a_1 = 1 \;, \qquad a_n = 5\,a_{n-1} - 3\,a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2 \quad .$$

<u>Soluzione</u>*:* esiste esattamente una e una sola successione che soddisfa le condizioni assegnate, data da $\quad a_n = \frac{\sqrt{13}-3}{2\sqrt{13}}\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{13}+3}{2\sqrt{13}}\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^n \;, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\;.$

2 — Calcolare tutte le successioni ricorsive $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = 5 \;, \qquad a_n = 7\,a_{n-1} \quad \forall\, n \geq 1 \quad .$$

<u>Soluzione</u>*:* esiste esattamente una e una sola successione che soddisfa le condizioni assegnate, data da $\quad a_n = 5 \cdot 7^n \;, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\;.$

3 — Calcolare tutte le successioni ricorsive $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = 1 \;, \quad a_1 = 8 \;, \qquad a_n = 4\,a_{n-1} - 4\,a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2 \quad .$$

<u>Soluzione</u>*:* esiste esattamente una e una sola successione che soddisfa le condizioni assegnate, data da $\quad a_n = 1 \cdot 2^n + 3 \cdot n\,2^n \;, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\;.$

4 — Calcolare tutte le successioni ricorsive $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che, per un fissato $A \in \mathbb{R}$, soddisfino le condizioni

$$a_0 = A \;, \qquad a_n = 4\,a_{n-1} - 5\,a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2 \quad .$$

<u>Soluzione</u>*:* per ciascun valore di $A \in \mathbb{R}$, esiste una famiglia infinita di successioni che soddisfano le condizioni assegnate, dipendente da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, date da

$$a_n = A \cdot 5^{n/2} \cdot \cos(n\,\vartheta) + \alpha \cdot 5^{n/2} \cdot \mathrm{sen}(n\,\vartheta) \;, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \big(\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\big)$$

dove $\vartheta := \arctan\big(1/2\big)$.

5 — *Successioni di Fibonacci (1)*: Calcolare tutte le successioni ricorsive $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = 0 \ , \quad a_1 = 1 \ , \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2 \quad .$$

Soluzione: esiste esattamente una e una sola successione che soddisfa le condizioni assegnate, data da $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \ , \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

6 — *Successioni di Fibonacci (2)*: Calcolare tutte le successioni ricorsive $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = 2 \ , \quad a_1 = -1 \ , \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2 \quad .$$

Soluzione: esiste esattamente una e una sola successione che soddisfa le condizioni assegnate, data da $a_n = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \ , \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

7 — Calcolare tutte le successioni ricorsive $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = 2 \ , \quad a_1 = -1 \ , \qquad a_n = 2\,a_{n-1} - 4\,a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2 \quad .$$

Soluzione: esiste esattamente una e una sola successione che soddisfa le condizioni assegnate, data da $a_n = 2^{n+1} \cdot \cos\big(n\,\pi/3\big) - 2^n\sqrt{3} \cdot \mathrm{sen}\big(n\,\pi/3\big) \ , \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

8 — Calcolare tutte le successioni ricorsive $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = 1 \ , \quad a_1 = -3 \ , \qquad a_n = a_{n-1} + 2\,a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2 \quad .$$

Soluzione: esiste esattamente una e una sola successione che soddisfa le condizioni assegnate, data da $a_n = \frac{5}{3} \cdot (-1)^n - \frac{2}{3} \cdot 2^n \ , \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

9 — Calcolare tutte le successioni ricorsive $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = A \ , \quad a_1 = B \ , \qquad a_n = 2\,a_{n-1} - 4\,a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2$$

dove $A, B \in \mathbb{R}$ sono arbitrari.

Soluzione: esistono infinite successioni, dipendenti dai parametri assegnati A e B, che soddisfano le condizioni assegnate, date — in funzione dei suddetti parametri — da

$$a_n = A \cdot 2^n \cdot \cos\big(n\,\pi/3\big) + \frac{(B-A)}{\sqrt{3}} \cdot 2^n \cdot \mathrm{sen}\big(n\,\pi/3\big) \ , \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad .$$

10 — Calcolare tutte le successioni ricorsive $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = 1 \;,\quad a_1 = -6 \;,\qquad a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2 \quad .$$

<u>*Soluzione:*</u> esiste esattamente una e una sola successione che soddisfa le condizioni assegnate, data da $a_n = 3^n - 3\cdot n\,3^n = \big(1-3\,n\big)\cdot 3^n \;,\;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

11 — Calcolare tutte le successioni ricorsive $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_4 = 0 \;,\qquad a_n = 2\,a_{n-1} + 3\,a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2 \quad .$$

<u>*Soluzione:*</u> esistono infinite successioni, dipendenti da un parametro $c \in \mathbb{R}$, che soddisfano le condizioni assegnate, date — in funzione del suddetto parametro c — da

$$a_n = c\cdot 3^n - 81\,c\,(-1)^n = c\cdot\big(3^n - 81\,(-1)^n\big) \;,\qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \;.$$

12 — Calcolare tutte le successioni ricorsive $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = 2 \;,\quad a_1 = -1 \;,\qquad a_n = -\,a_{n-1} + 6\,a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2 \quad .$$

<u>*Soluzione:*</u> esiste esattamente una e una sola successione che soddisfa le condizioni assegnate, data da $a_n = 2^n + (-3)^n \;,\;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

13 — Calcolare tutte le successioni $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = 3 \;,\quad a_1 = -1 \;,\qquad a_n = 2\,a_{n-1} - 3\,a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2 \qquad \text{per} \quad a \in \{c, r\} \quad .$$

<u>*Soluzione:*</u> Per il caso complesso, esiste esattamente una e una sola successione $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che soddisfa le condizioni assegnate, data da

$$c_n = \big(\tfrac{3}{2} + i\sqrt{2}\,\big)\cdot\big(1 + i\sqrt{2}\,\big)^n + \big(\tfrac{3}{2} - i\sqrt{2}\,\big)\cdot\big(1 - i\sqrt{2}\,\big)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Se invece cerchiamo successioni *reali* $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con le stesse proprietà, osserviamo che ogni successione reale è anche complessa: dunque la sola possibilità è che l'unica successione complessa che abbiamo già trovato sia in effetti reale (cioè sia una successione di numeri reali). Ma dato che i valori iniziali sono reali e la funzione di ricorrenza è lineare omogenea a coefficienti reali, tale successione già calcolata è certamente reale (anche se a prima vista magari non lo sembra...). Dunque la soluzione è $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ come calcolata in precedenza. Infine, volendo esprimere tale successione (reale) $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ come combinazione lineare (a coefficienti reali) di successioni reali, si trova

$$r_n = 3\cdot 3^{n/2}\cos\big(n\,\vartheta\big) + \Big(-3 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)\cdot 3^{n/2}\,\mathrm{sen}\big(n\,\vartheta\big) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

con $\vartheta := \arctan\big(\sqrt{2}\,\big)$.

14 — Calcolare tutte le successioni $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = -1 \ , \quad a_1 = 2\,i \ , \qquad a_n = 2\,a_{n-1} - 3\,a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2 \qquad \text{per} \quad a \in \{c, r\} \quad .$$

<u>*Soluzione:*</u> esiste esattamente una e una sola successione $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ che soddisfa le condizioni assegnate, data da

$$c_n = \left(\tfrac{-1+\sqrt{2}}{2} - \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\,i\right)\cdot\left(1 + i\sqrt{2}\,\right)^n + \left(\tfrac{-1-\sqrt{2}}{2} + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\,i\right)\cdot\left(1 - i\sqrt{2}\,\right)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

N.B.: in questo caso ovviamente successioni *reali* con le stesse proprietà NON esistono, dato che il valore $a_1 = 2\,i$ non sarebbe reale!...

15 — Calcolare tutte le successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_n = 6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2} \qquad \forall\, n \geq 2$$

e

$$a_5 = 1 \ , \quad a_6 = 2 \ , \quad a_7 = 5$$

oppure

$$a_5 = -1 \ , \quad a_6 = -1 \ , \quad a_7 = 3$$

<u>*Soluzione:*</u> Nel *primo* caso certamente NON esiste nessuna successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ che soddisfi le condizioni assegnate, in quanto si ha

$$a_7 = 5 \neq 3 = 6\cdot 2 - 9\cdot 1 = 6\cdot a_6 - 9\cdot a_5$$

dunque la condizione di ricorsività *non* è soddisfatta dai tre valori preassegnati che dovrebbero corrispondere ai tre termini consecutivi a_5, a_6 e a_7 di una successione (ricorsiva) del tipo richiesto.

Nel *secondo* caso invece — nel quale i valori assegnati ai tre termini successivi a_5, a_6 e a_7 *soddisfano* la condizione di ricorsività — esiste esattamente una ed una sola successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ come richiesto, data da

$$a_n = -\tfrac{13}{729}\cdot 3^n + \tfrac{2}{729}\cdot n\,3^n = \tfrac{1}{729}\cdot\left(-13 + 2\,n\right)3^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \ .$$