CdL in Informatica — a.a. 2012/2013

MATEMATICA DISCRETA

prof. Fabio GAVARINI

Sessione Estiva Anticipata — 2º appello

Esame scritto del 22 Febbraio 2013

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . • . . . .

[1] *(a)* Calcolare — se esiste — la classe $\overline{z}^{-1} \in \mathbb{Z}_{100}$ inversa della classe $\overline{z} \in \mathbb{Z}_{100}$ per i casi $z := 56$ e $z := 369$. Se invece tale classe non esiste, se ne spieghi il perché.

(b) Risolvere l'equazione $-\overline{131} \cdot \overline{x} = \overline{273}$ in $\mathbb{Z}_{100}$.

[2] Si considerino i reticoli D_{120}, D_{210} e D_{216} dei divisori di 120, di 210 e di 216 (rispettivamente), ed il reticolo $\mathcal{P}(\mathbb{S})$ delle parti dell'insieme $\mathbb{S} := \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$.

(a) Per ciascuno degli elementi (nei rispettivi reticoli)

$$30\,,40 \in D_{120}\ , \quad 70 \in D_{210}\ , \quad 18 \in D_{216}\ , \quad \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}\,, \{\diamondsuit, \clubsuit\} \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$$

si determini — se possibile — una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in fattori $\vee$–irriducibili. Se invece una tale $\vee$–fattorizzazione non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

(b) Determinare quali dei quattro suddetti reticoli siano algebre di Boole.

(c) Determinare se tra alcuni dei suddetti reticoli esistano degli isomorfismi (di reticoli).

[3] Determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\begin{cases} 74\,x \equiv -85 \pmod{9} \\ 124\,x \equiv 313 \pmod{5} \end{cases}$$

(<u>CONTINUA</u> . . . $\Longrightarrow$)

[4] Dato l'insieme $\mathbb{S} := \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$, sia $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{S}} := \big\{ f : \mathbb{S} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \,\big|\, f \text{ è funzione} \big\}$ l'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{S}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Si consideri in $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{S}}$ la relazione $\dashv$ definita così: $f' \dashv f'' \iff \big(f'(\diamondsuit) \supseteq f''(\diamondsuit)\big)$ & $\big(f'(\clubsuit) \subseteq f''(\clubsuit)\big)$, per ogni $f', f'' \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{S}}$.

Dimostrare che:

(a) la relazione $\dashv$ è riflessiva e transitiva;

(b) la relazione $\dashv$ non è antisimmetrica;

(c) esistono elementi $f_- \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{S}}$ tali che $f_- \dashv f$ per ogni $f \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{S}}$;

(d) esistono elementi $f_+ \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{S}}$ tali che $f \dashv f_+$ per ogni $f \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{S}}$;

[5] Calcolare — se esistono — tutte le successioni $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ per le quali

$$a_0 = -3 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \qquad a_n = 4\,a_{n-1} - 4\,a_{n-2} \qquad \forall \; n \geq 2 \quad .$$

Nel caso in cui invece successioni di questo tipo *non* esistano, si spieghi il perché.

[6] Si consideri il multidigrafo $\overrightarrow{G}$, avente esattamente 7 vertici $v_1, v_2, \dots, v_7$, la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$A_{\overrightarrow{G}} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare i gradi *uscente*, *entrante* e *totale* di ciascuno dei vertici di $\overrightarrow{G}$.

(b) Descrivere graficamente (= disegnare...) il multidigrafo $\overrightarrow{G}$.

(c) Determinare se $\overrightarrow{G}$ è euleriano. In ogni caso (affermativo o negativo) si spieghi il perché; in caso affermativo inoltre, si determini esplicitamente un cammino euleriano.