

MATEMATICA DISCRETA
CdL in Informatica — a.a. 2017/2018

prof. Fabio GAVARINI

I sessione (=Sessione Estiva Anticipata) – II appello

Esame scritto del 19 Febbraio 2018

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... ♠

[1] Si consideri il polinomio booleano — nelle tre variabili u, v e w — definito da
$$Q(u, v, w) := \left((w'' \vee 0 \vee v') \wedge ((w' \wedge 1 \wedge u') \wedge v)' \right)' \vee (v'' \wedge 0' \wedge (w \wedge u)' \wedge w \wedge u') \vee ((v \wedge u')' \vee v')'$$

- (a) Determinare la *Forma Normale Disgiuntiva* di $Q(u, v, w)$.
- (b) Determinare una *forma minimale* di $Q(u, v, w)$.

[2] Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$-13 \cdot 2^{2n+1} \cdot 4 \equiv (-11)^{n+2} \pmod{15}$$

[3] Siano $A, B \in \mathbb{N}$ i due numeri che in notazione posizionale sono espressi da

$$A := (3042)_{\text{CINQUE}} \quad \text{in base CINQUE}, \quad B := (4126)_{\text{DIECI}} \quad \text{in base DIECI},$$

utilizzando le cinque cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4 per la notazione in base CINQUE e le dieci cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 per quella in base DIECI.

- (a) Scrivere A in base DIECI.
- (b) Scrivere B in base NOVE, usando le nove cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
- (c) Scrivere B in base TRE, usando le tre cifre (ordinate) 0, 1, 2.

[4] Determinare l'insieme di tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\circledast : \begin{cases} 125x \equiv 73 & (\text{mod } 8) \\ 344x \equiv -90 & (\text{mod } 10) \\ -81x \equiv 153 & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

(...continua \implies)

[5] Si consideri il multidigrafo \vec{G} , avente esattamente otto vertici u_1, u_2, \dots, u_8 , la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$M_{\vec{G}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Direttamente dall'analisi della matrice di adiacenza $M_{\vec{G}}$, si determinino il grado entrante $d^+(u)$, il grado uscente $d^-(u)$ e il grado totale $d^{tot}(u)$ di ciascun vertice u di \vec{G} , e il numero di archi di \vec{G} .

(b) Determinare se il multidigrafo \vec{G} sia euleriano, o semieuleriano, o nessuno dei due.

(c) Determinare la matrice di adiacenza $M_{\overline{G}}$ del multigrafo \overline{G} associato (o “soggiacente”) al multidigrafo \vec{G} .

(d) Determinare una (eventuale) foglia e un (eventuale) ponte del multigrafo \overline{G} .

(e) Dimostrare che il multigrafo \overline{G} non è un albero, e trovarne un albero ricoprente.

(f) Descrivere graficamente (= disegnare...) il multidigrafo \vec{G} .

[6] Si consideri l'insieme D_{7000} dei divisori di 7000 (in \mathbb{N}), con la struttura usuale di reticolo data dalla relazione (d'ordine) di divisibilità, indicata con δ . Inoltre, posto

$$\mathcal{D}' := \{1, 4, 7, 56, 125, 500, 875, 7000\}$$

l'insieme ordinato $(\mathcal{D}'; \delta)$ è a sua volta un reticolo.

(a) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi \vee -irriducibili nel reticolo D_{7000} .

(b) Determinare una \vee -fattorizzazione non ridondante in fattori \vee -irriducibili degli elementi $b := 875$, $d := 500$ e $q := 7000$ in D_{7000} , se possibile; se invece non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

(c) Il reticolo D_{7000} è un'algebra di Boole? (N.B.: motivare adeguatamente la risposta!)

(d) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi \vee -irriducibili nel reticolo \mathcal{D}' .

(e) Determinare una \vee -fattorizzazione non ridondante in fattori \vee -irriducibili degli elementi $b := 875$, $d := 500$ e $q := 7000$ in \mathcal{D}' , se possibile; se invece non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

(f) Il reticolo \mathcal{D}' è un'algebra di Boole? (N.B.: motivare adeguatamente la risposta!)

(g) Il reticolo \mathcal{D}' è sottoreticolo del reticolo D_{7000} ?