MATEMATICA DISCRETA
CdL in Informatica
prof. Fabio GAVARINI
a.a. 2017–2018 — Esame scritto del 18 Settembre 2018 — Sessione Autunnale, II appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>sintetico</u> ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

· · · · · · · · · ⋆ · · · · · · · · ·

[1] — *(a)* Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione congruenziale
$$580397^{6250395}\, x \;\equiv\; -4251093768 \qquad (\mathrm{mod}\ 20)$$

(b) Per ciascuna delle seguenti equazioni diofantee, determinare se esista almeno una soluzione. In caso negativo, si spieghi perché non esistano soluzioni; in caso positivo, si determini esplicitamente una soluzione particolare:
$$(c.1)\quad 252\,x + 117\,y \;=\; 28 \quad , \qquad (c.2)\quad 117\,x + (-252)\,y \;=\; 36$$

[2] — Dato un numero naturale positivo $n \in \mathbb{N}_+$, si consideri nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali la relazione $\preccurlyeq_n$ definita da
$$s \preccurlyeq_n c \iff \exists\, d \in \mathbb{N} : (c-s) = d\,n \qquad \big(\,\forall\, s, c \in \mathbb{N}\,\big)$$

(a) Dimostrare che la relazione $\preccurlyeq_n$ non è di equivalenza.

(b) Dimostrare che la relazione $\preccurlyeq_n$ è di ordine.

(c) Dimostrare che nell'insieme ordinato $\big(\mathbb{N}\,;\preccurlyeq_n\big)$ non esiste massimo.

(d) Dimostrare che *se* $n > 1$, nell'insieme ordinato $\big(\mathbb{N}\,;\preccurlyeq_n\big)$ non esiste minimo.

(e) Determinare tutti gli (eventuali) elementi massimali di $\big(\mathbb{N}\,;\preccurlyeq_n\big)$.

(f) Determinare tutti gli (eventuali) elementi minimali di $\big(\mathbb{N}\,;\preccurlyeq_n\big)$.

(g) Determinare, motivando adeguatamente la risposta, se l'insieme ordinato $\big(\mathbb{N}\,;\preccurlyeq_n\big)$ sia un reticolo oppure no.

[3] — Data un'algebra di Boole B qualsiasi, si considerino tre elementi $a, b, c \in B$. Verificare se coincidano oppure no i due elementi $\mathcal{S}$, $\mathcal{R}$ di B definiti da
$$\mathcal{S} \;:=\; \Big(\big(\,a \vee b'' \vee a\,\big) \wedge \big(\,c'' \vee a' \vee c \vee 1' \vee b''\,\big)\Big)' \;\vee$$
$$\vee\; \Big(\big(\,b \vee 0 \vee a''\,\big)' \wedge \Big(\big(\,c'' \vee a \vee c\,\big) \vee \big(\,b \vee 0 \vee b'\,\big)'\,\Big)\Big)$$
$$\mathcal{R} \;:=\; \big(\,b'' \vee c \vee a'\,\big)' \vee \Big(\big(\,a' \wedge b'\,\big) \wedge \Big(\big(\,b' \vee \big(a'' \wedge c\big)\big) \vee \big(a \vee b\,\big)'\Big)\Big)$$

[4] — Si consideri l'insieme $\mathbb{A} := \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e i suoi sottoinsiemi

$$G := \{a, c, e\} \quad , \qquad H := \{b, f\} \quad , \qquad K := \{a, b, d, f, g\}$$

(a) Calcolare esplicitamente il sottoinsieme $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}\big(H \cup \mathcal{C}_{\mathbb{A}}(K)\big) \setminus G$, dove la notazione $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}(S)$ indica il complementare in $\mathbb{A}$ di un qualsiasi sottoinsieme S di $\mathbb{A}$.

(b) Determinare l'unico sottoinsieme I di $\mathbb{A}$ per il quale la corrispondente funzione caratteristica $\chi_I : \mathbb{A} \longrightarrow \underline{2} := \{0, 1\}$ sia data da

$$\chi_I(a) = 0 \ , \quad \chi_I(b) = 1 \ , \quad \chi_I(c) = 0 \ , \quad \chi_I(d) = 0 \ , \quad \chi_I(e) = 1 \ , \quad \chi_I(f) = 0 \ , \quad \chi_I(g) = 1$$

(c) Descrivere esplicitamente la funzione caratteristica $\chi_J : \mathbb{A} \longrightarrow \underline{2} := \{0, 1\}$ del sottoinsieme $J := \{b, c, e, f\}$ di $\mathbb{A}$.

[5] — Si dimostri che un qualsiasi albero A che abbia più di due foglie non è né euleriano né semieuleriano.

[6] — Si consideri il digrafo — privo di archi multipli! — $\overrightarrow{G} := \Big(V\,, \overrightarrow{E}\Big)$ definito esplicitamente da

$$V := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$\overrightarrow{E} := \big\{(2,1), (1,4), (7,1), (5,3), (3,7), (4,3), (4,4), (4,6), (7,6), (6,4), (6,6), (6,5)\big\}$$

e si indichi con $\mathbb{G}$ il multigrafo associato a $\overrightarrow{G}$.

(a) Determinare esplicitamente la matrice di adiacenza $M_{\overrightarrow{G}}$ del digrafo $\overrightarrow{G}$.

(b) Disegnare il digrafo $\overrightarrow{G}$.

(c) Determinare tutte le (eventuali) foglie del multigrafo $\mathbb{G}$.

(d) Determinare se esista un albero ricoprente del multigrafo $\mathbb{G}$. In caso negativo, si spieghi perché non esista; in caso positivo, si specifichi un particolare alberi ricoprente $\mathbb{A}$ e se ne scriva la matrice di adiacenza $M_{\mathbb{A}}$.