

MATEMATICA DISCRETA
CdL in Informatica — a.a. 2015/2016

prof. Fabio GAVARINI

I sessione (=Sessione Estiva Anticipata) – II appello

Esame scritto del 16 Febbraio 2016

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in *corsivo* con grafia leggibile.*

..... ‡

[1] Determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$(*) : \begin{cases} 29x \equiv 11 & (\text{mod } 4) \\ -13x \equiv 27 & (\text{mod } 5) \\ 165x \equiv -15 & (\text{mod } 9) \end{cases}$$

[2] Determinare — se esistono — tutte le successioni $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = -1 \quad , \quad a_1 = 5 \quad , \quad a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

e tutte le successioni $\underline{b} := \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$b_0 = 3 \quad , \quad b_1 = 7 \quad , \quad b_2 = -5 \quad , \quad b_n = 10b_{n-1} - 25b_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \quad .$$

[3] Si consideri il reticolo D_n dei divisori di n per i due valori $n := 220$ e $n := 105$.

(a) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi \vee -irriducibili di D_{220} e di D_{105} .

(b) Determinare una \vee -fattorizzazione non ridondante in fattori \vee -irriducibili degli elementi $b := 44 \in D_{220}$, $d := 35 \in D_{105}$ e $q := 15 \in D_{105}$, se possibile; se invece non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

(c) D_{220} è un'algebra di Boole? D_{105} è un'algebra di Boole? (*N.B.: spiegare!*)

(d) Si consideri il sottoinsieme $\mathcal{D}_{220}^- := D_{220} \setminus \{1, 44, 220\}$, dotato della relazione d'ordine di divisibilità. Relativamente a tale relazione d'ordine, si chiede:

(d.1) Esistono in \mathcal{D}_{220}^- degli elementi *massimali*? Se no, perché? Se sì, quali sono?

(d.2) Esiste un *minimo* in \mathcal{D}_{220}^- ? Se sì, qual è? Se no, perché non esiste?

[4] Si consideri l'insieme $\mathbb{S} := \{\flat, \sharp, \# \}$ e il relativo insieme delle parti $\mathcal{P}(\mathbb{S})$; si considerino poi in $\mathcal{P}(\mathbb{S})$ le due relazioni η e $\neg\circ$ definite da

$$\begin{aligned} S' \eta S'' &\iff |\mathbb{S} \setminus S'| = |\mathbb{S} \setminus S''| \\ S' \neg\circ S'' &\iff \left(|S'| \not\leq |S''| \text{ oppure } S' = S'' \right) \end{aligned} \quad \forall S', S'' \in \mathcal{P}(\mathbb{S})$$

- (a) Dimostrare che la relazione η è una equivalenza.
- (b) Descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza di η .
- (c) Dimostrare che la relazione $\neg\circ$ è una relazione d'ordine.
- (d) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(\mathcal{P}(\mathbb{S}); \neg\circ)$.
- (e) L'insieme ordinato $(\mathcal{P}(\mathbb{S}); \neg\circ)$ è un reticolo? In un caso o nell'altro — negativo o positivo che sia — si giustifichi la risposta.

- [5] (a) Determinare il resto di 975^{40163} nella divisione per 14.
- (b) Nell'anello \mathbb{Z}_{14} delle classi resto modulo 14, determinare il sottoinsieme di tutte le classi invertibili (rispetto alla moltiplicazione).
