MATEMATICA DISCRETA
CdL in Informatica — a.a. 2015/2016
prof. Fabio GAVARINI

III sessione (=Sessione Autunnale) – appello unico
Esame scritto del 14 Settembre 2016

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . $\circledast$ . . . .

[1] Sia D_{104} l'insieme dei numeri naturali divisori di 104, dotato della relazione d'ordine di *divisibilità*, e sia $\mathcal{P}\big(\{g\,,p\,,q\}\big)$ l'insieme delle parti dell'insieme $\{g\,,p\,,q\}$, dotato della relazione d'ordine di *inclusione*; in particolare, entrambi sono insiemi ordinati.

(a) D_{104} è *limitato*? $\mathcal{P}\big(\{g\,,p\,,q\}\big)$ è *limitato*? In ciascuno dei due casi, se la risposta è negativa se ne spieghi il perché, se invece è affermativa si precisi quali siano i limiti.

(b) D_{104} è un *reticolo*? $\mathcal{P}\big(\{g\,,p\,,q\}\big)$ è un *reticolo*?

(c) L'ordine in D_{104} è *totale*? L'ordine in $\mathcal{P}\big(\{g\,,p\,,q\}\big)$ è *totale*?

(d) Quali sono — se esistono — gli *atomi* di D_{104} e gli *atomi* di $\mathcal{P}\big(\{g\,,p\,,q\}\big)$?

(e) D_{104} è un'*algebra di Boole*? $\mathcal{P}\big(\{g\,,p\,,q\}\big)$ è un'*algebra di Boole*?

N.B.: per ciascuna delle domande precedenti, si giustifichi adeguatamente la risposta.

[2] Determinare se esista una successione di numeri reali $\underline{a} := \big\{a_n\big\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ che sia ricorsiva secondo la relazione di ricorrenza

$$a_n \;=\; a_{n-1} + 6\,a_{n-2} \qquad \text{per ogni} \qquad n \geq 2$$

e tale che

(a) $$a_0 \;=\; 4\;, \quad a_1 \;=\; -7\;, \quad a_2 \;=\; 13$$

oppure

(b) $$a_0 \;=\; 5\;, \quad a_1 \;=\; -5\;, \quad a_2 \;=\; 25$$

In ciascuno dei due casi, se la risposta è negativa, si spieghi perché; se invece è affermativa, si calcolino tutte le successioni del tipo richiesto.

[3] Determinare l'insieme di tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\circledast : \begin{cases} 183\,x \;\equiv\; -51 & \big(\text{mod } 9\big) \\ 126\,x \;\equiv\; -58 & \big(\text{mod } 10\big) \\ -45\,x \;\equiv\; 116 & \big(\text{mod } 7\big) \end{cases}$$

(...continua $\Longrightarrow$)

[**4**] Si consideri il multigrafo G, avente esattamente otto vertici v_1, v_2, ..., v_8, la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$A_G \ := \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare se il multigrafo G sia un *albero*.

(b) Determinare se il multigrafo G sia *euleriano*: in ogni caso (affermativo o negativo) si spieghi il perché; in caso affermativo inoltre, si trovi esplicitamente un *cammino euleriano* in G, indicandone la successione di vertici e spigoli.

(c) Determinare, se esiste, un *albero generatore* del multigrafo G nel quale i vertici v_1, v_4, v_5 e v_7 siano *foglie*. In caso negativo, si spieghi perché un tale albero non esista.

(d) Determinare, se esiste, un *albero generatore* del multigrafo G nel quale i vertici v_2, v_5, v_6 e v_8 siano *foglie*. In caso negativo, si spieghi perché un tale albero non esista.

(e) Determinare, se esistono, tutti i *cicli* presenti nel multigrafo G, descrivendoli come successioni di vertici e spigoli.

[**5**] Si considerino gli insiemi $E := \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$, $E_+ := \{\sharp, \flat, \spadesuit\}$, $E^\circ := E \cup E_+$. Si consideri poi la funzione

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E^\circ) \ , \qquad E' \mapsto f(E') := E' \cup E_+ \qquad \forall\ E' \in \mathcal{P}(E)$$

e sia $\propto$ la relazione in $\mathcal{P}(E)$ definita da

$$E' \propto E'' \iff f(E') \supseteq f(E'')$$

(a) Dimostrare che la funzione f è <u>non</u> *iniettiva*.

(b) Dimostrare che la funzione f è <u>non</u> *suriettiva*.

(c) Dimostrare che la relazione $\propto$ è *riflessiva* e *transitiva* ma <u>non</u> *antisimmetrica*.

(d) Determinare, se esiste, un elemento $E_\downarrow \in \mathcal{P}(E)$ tale che $E_\downarrow \propto E'$ per ogni $E' \in \mathcal{P}(E)$ — l'analogo di un "minimo" per la relazione $\propto$.

(e) Determinare, se esiste, un elemento $E^\uparrow \in \mathcal{P}(E)$ tale che $E' \propto E^\uparrow$ per ogni $E' \in \mathcal{P}(E)$ — l'analogo di un "massimo" per la relazione $\propto$.