CdL in Informatica — a.a. 2012/2013

MATEMATICA DISCRETA

prof. Fabio GAVARINI

Sessione Estiva

Esame scritto del 12 Giugno 2013

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente***, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . ◇ . . . .

[1] Si consideri il multigrafo G, avente esattamente quattro vertici v_1, v_2, v_3, v_4, la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$A_G := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il grado di ciascun vertice di G.

(b) Determinare gli eventuali cappi di G.

(c) Determinare gli eventuali spigoli multipli di G.

(d) Determinare se G è euleriano: in ogni caso (affermativo o negativo) si spieghi il perché; in caso affermativo inoltre, si determini esplicitamente un cammino euleriano.

(e) Descrivere graficamente (= disegnare...) il multigrafo G.

(f) Determinare tutti gli alberi generatori di G.

[2] Si consideri il polinomio booleano — nelle tre variabili a, b e c — dato da

$$f(a,b,c) \; := \; \Big(\big(b' \wedge a\big)' \wedge \big(b' \vee c' \vee a\big) \Big)' \vee \Big(\big(c' \vee a \vee c'\,\big) \wedge \big(a \vee b\big) \Big)'$$

(a) Calcolare la *forma normale disgiuntiva* di f.

(b) Calcolare una *forma minimale* di f.

(c) Calcolare — magari sfruttando i risultati ottenuti in *(a)* e/o in *(b)*, ma non necessariamente — una *forma minimale* del polinomio p dato da

$$p \; := \; (c \wedge a)' \vee f \vee \big(b' \wedge c\big)$$

(CONTINUA . . . ⟹)

[3] Calcolare — se esistono — tutte le successioni $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ per le quali

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 3\sqrt{2}+1 \quad , \quad a_2 = 3+6\sqrt{2} \quad , \qquad a_n = 2\,a_{n-1}+a_{n-2} \qquad \forall\; n \geq 2 \;.$$

Nel caso in cui invece successioni di questo tipo *non* esistano, se ne spieghi il perché.

[4] Nell'insieme $\mathbb{N}_+$ dei numeri naturali positivi, per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ sia $D_P(n)$ l'insieme di tutti i primi che dividono n. Si consideri poi in $\mathbb{N}_+$ la relazione binaria $\multimap$ così definita:

$$n' \multimap n'' \quad \Longleftrightarrow \quad D_P(n') \subseteq D_P(n'') \qquad\qquad \text{per ogni} \quad n', n'' \in \mathbb{N}_+$$

Dimostrare che:

(a) la relazione $\multimap$ non è simmetrica;
(b) la relazione $\multimap$ non è antisimmetrica;
(c) la relazione $\multimap$ è riflessiva e transitiva (in breve, è un *preordine*);
(d) esiste uno ed un solo elemento $n_- \in \mathbb{N}_+$ tale che $n_- \multimap n$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$;
(e) non esiste alcun elemento $n_+ \in \mathbb{N}_+$ tale che $n \multimap n_+$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$.

[5] Determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\begin{cases} -88\,x \equiv 109 \pmod{9} \\ \;\;95\,x \equiv -29 \pmod{7} \end{cases}$$