

MATEMATICA DISCRETA

CdL in Informatica

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2017–2018 — Sessione Estiva Anticipata, I appello

Esame scritto del 5 Febbraio 2018

.....

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... \mathcal{B}

[1] Determinare tutti i numeri $x \in \mathbb{Z}$ che soddisfino *simultaneamente* le tre condizioni seguenti:

$$317x \equiv 287 \pmod{14} \quad (\text{in } \mathbb{Z}), \quad -\overline{71} \overline{x} = \overline{414} \quad (\text{in } \mathbb{Z}_{11}), \quad 101 \leq x \leq 200$$

[2] Dato l'insieme $L := \{1, 2, 3, 6, 7, 12, 56, 168\}$, si consideri in esso la relazione di divisibilità δ , rispetto alla quale $(L; \delta)$ è un insieme ordinato.

(a) Verificare che l'insieme ordinato $(L; \delta)$ è un reticolo, scrivendo esplicitamente tutti i valori $\sup(x, y)$ e $\inf(x, y)$ per ogni $x, y \in L$ (tranne i casi banali).

(b) Determinare tutti gli atomi del reticolo $(L; \delta)$.

(c) Determinare tutti gli elementi \vee -irriducibili del reticolo $(L; \delta)$.

(d) Per ciascuno dei due elementi 56 e 168 in L , determinare se esista una \vee -fattorizzazione non ridondante in fattori \vee -irriducibili per tale elemento. Nel caso in cui una tale \vee -fattorizzazione non esista, se ne spieghi il perché; nel caso in cui ne esista almeno una, si determinino *tutte* (a meno dell'ordine dei fattori) le \vee -fattorizzazioni di tal genere.

(e) Stabilire, motivando adeguatamente la risposta, se il reticolo $(L; \delta)$ sia un'algebra di Boole oppure no.

[3] Sia E un insieme, e $\mathcal{P}(E)$ il suo insieme delle parti. Consideriamo in $\mathcal{P}(E)$ la relazione η così definita:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \eta B \iff \begin{cases} A = B \quad \text{e} \quad |A| = |B| \leq 1 \\ \text{oppure} \\ \exists Z \in \mathcal{P}(E) \quad \text{t.c.} \quad |A \cap Z| = 2 = |Z \cap B| \end{cases}$$

(a) Dimostrare che η è una relazione di equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza di η .

(continua...)

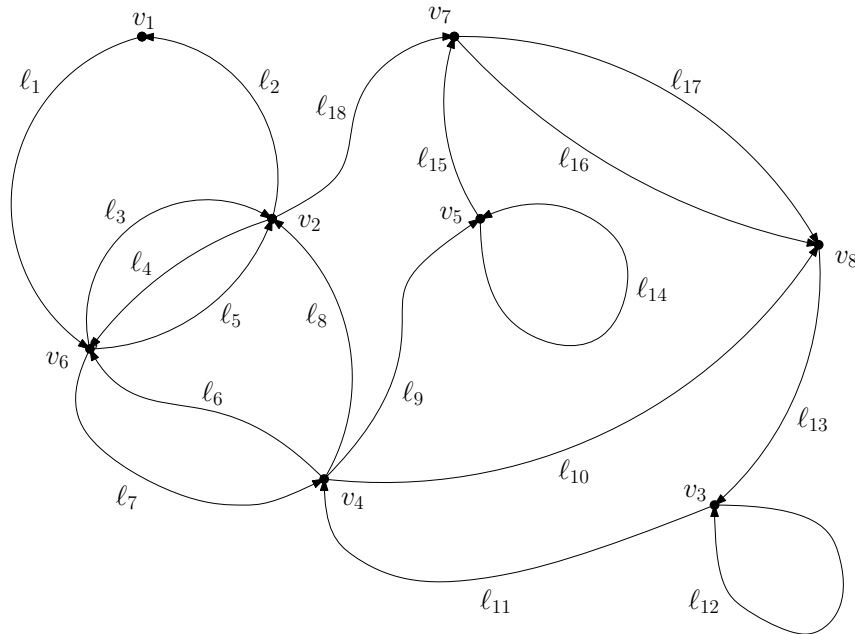
[4] Determinare la *Forma Normale Disgiuntiva* del polinomio booleano

$$Q(a, b, c) = \left(\left(\left(c'' \wedge (1' \vee a)' \right)' \vee (a' \wedge 0' \wedge b' \wedge a'') \vee (b' \wedge a) \right)' \wedge \right. \\ \left. \wedge \left((b' \vee c' \vee 1')' \vee b'' \vee (c'' \wedge a \wedge c)' \right)' \right)'$$

[5] (a) Per ciascuna delle due classi $\overline{14}$ e $\overline{11}$ nell'anello unitario \mathbb{Z}_{21} delle classi resto modulo 21, calcolare la classe inversa, o dimostrare che non esiste.

(b) Determinare tutti gli interi $x \in \mathbb{Z}$ tali che $-52x \equiv 67^{36124} \pmod{21}$.

[6] Sia $\vec{G} := (V, E)$ il multidigrafo così rappresentato:



(a) Determinare esplicitamente la matrice di adiacenza del multidigrafo \vec{G} .

(b) Determinare se il multidigrafo \vec{G} sia euleriano oppure no: in caso negativo si spieghi il perché, in caso affermativo si determini esplicitamente un possibile cammino euleriano.

(c) Indicando con $\overline{\mathbf{G}}$ il multigrafo associato a \vec{G} , si determini esplicitamente la matrice di adiacenza di $\overline{\mathbf{G}}$.

(d) Determinare se il multigrafo $\overline{\mathbf{G}}$ sia euleriano oppure no: in caso negativo si spieghi il perché, in caso affermativo si determini esplicitamente un possibile cammino euleriano.

(e) Il multigrafo $\overline{\mathbf{G}}$ non è un albero. Com'è possibile dedurre questo fatto dalla sola analisi della matrice di adiacenza di $\overline{\mathbf{G}}$?

(f) Determinare esplicitamente tre diversi alberi ricoprenti di $\overline{\mathbf{G}}$.