MATEMATICA DISCRETA
CdL in Informatica
prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2017–2018 — Esame scritto del 3 Luglio 2018 — Sessione Estiva, II appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

········· ⋆ ·········

[1] Si consideri il polinomio booleano $P_{Q,R} = P_{Q,R}(h,k,\ell,t)$ definito da

$$P_{Q,R}(h,k,\ell,t) \ := \ \Big(\Big(h' \wedge \big((\ell' \vee t)' \vee (k \wedge t) \big) \Big) \wedge 0' \wedge \Big(\big(t' \wedge (k \vee t') \big) \vee t \Big) \Big) \vee \\ \vee \ \Big(\ell' \wedge \Big(\Big(h \wedge \big((Q \vee R)' \vee h \big) \Big) \vee h' \Big) \wedge 1 \wedge \Big(\big(h' \vee k \big)' \vee k \Big) \Big)$$

dipendente a sua volta dai due polinomi $Q := Q(h,k,\ell,t)$ e $R := R(h,k,\ell,t)$.

(a) Calcolare una *somma di prodotti fondamentali* equivalente a $P_{Q,R}$.

(b) Calcolare una *seconda* somma di prodotti fondamentali equivalente a $P_{Q,R}$, diversa da quella ottenuta in *(a)*, in modo che una delle due sia *più semplice* dell'altra; in particolare, si spieghi perché l'una sia più semplice dell'altra.

[2] Dato l'insieme $\{€\,,\pounds\,,¥\,,\$\}$, si consideri il corrispondente insieme delle parti $\mathcal{P}\big(\{€\,,\pounds\,,¥\,,\$\}\big)$, dotato della relazione (d'ordine) di inclusione; *per semplificare la notazione indicheremo un sottoinsieme* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *con* $\underline{x_1\,x_2\,\dots x_n} := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Si consideri poi in $\mathcal{P}\big(\{€\,,\pounds\,,¥\,,\$\}\big)$ il sottoinsieme

$$\mathbb{E} \ := \ \big\{ \emptyset\,,\, \underline{€}\,,\, \underline{\pounds}\,,\, \underline{¥}\,,\, \underline{\pounds¥}\,,\, \underline{€\pounds¥}\,,\, \underline{€\pounds\$}\,,\, \underline{€¥\$}\,,\, \underline{€\pounds¥\$} \big\}$$

e i suoi sottoinsiemi

$$\mathbb{E}' \ := \ \mathbb{E} \setminus \big\{ \underline{\pounds¥} \big\} \quad , \qquad \mathbb{E}'' \ := \ \mathbb{E} \setminus \big\{ \underline{€\pounds¥} \big\}$$

In tali (sotto)insiemi $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ e $\mathbb{E}''$ consideriamo ancora la relazione (d'ordine) di inclusione.

(a) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $\big(\mathbb{E}\,;\subseteq\big)$.

(b) Verificare se l'insieme ordinato $\big(\mathbb{E}\,;\subseteq\big)$ sia un reticolo oppure no. In caso negativo, si spieghi perché tale insieme ordinato non sia un reticolo; in caso affermativo, si determini (giustificando la risposta) se tale reticolo sia distributivo.

(c) Verificare se l'insieme ordinato $\big(\mathbb{E}'\,;\subseteq\big)$ sia un reticolo oppure no. In caso negativo, si spieghi perché tale insieme ordinato non sia un reticolo; in caso affermativo, si determini (giustificando la risposta) se tale reticolo sia un'algebra di Boole.

(d) Verificare se l'insieme ordinato $\big(\mathbb{E}''\,;\subseteq\big)$ sia un reticolo oppure no. In caso negativo, si spieghi perché tale insieme ordinato non sia un reticolo; in caso affermativo, si determini (giustificando la risposta) se tale reticolo sia un'algebra di Boole.

[3] Determinare tutti i numeri interi $x \in \mathbb{Z}$ per i quali si abbia simultaneamente

$$[63]_{105} \cdot [x]_{105} = [189]_{105} \quad \text{in } \mathbb{Z}_{105} \qquad \text{e} \qquad 317\,x \equiv -49 \pmod{20} \quad \text{in } \mathbb{Z} \ .$$

[4] *Utilizzando il Principio di Induzione*, si dimostri che per ogni insieme finito e non vuoto A con $n := \big|A\big|$ elementi, l'insieme $\underline{2}^A$ delle funzioni caratteristiche in A — dove $\underline{2} := \{0,1\}$ — ha esattamente 2^n elementi, cioè $\big|\underline{2}^A\big| = 2^n$.

[5] Si consideri il multidigrafo $\overrightarrow{G}$, avente esattamente sei vertici v_1 , v_2 , ..., v_6 , la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$A_{\overrightarrow{G}} := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e sia $\mathbf{G}$ il multigrafo associato al multidigrafo $\overrightarrow{G}$.

(a) Calcolare il numero di cammini (orientati) di lunghezza 3 da v_2 a v_6 , da v_5 a v_2 , da v_4 a v_3 e da v_6 a v_2 . In ciascun caso, se tale numero è maggiore di zero si determini un cammino esplicito del tipo considerato.

(b) Determinare, *direttamente dall'analisi della sua matrice di adiacenza* $A_{\overrightarrow{G}}$, il numero di archi del multidigrafo $\overrightarrow{G}$.

(c) Determinare se esistano nel multidigrafo $\overrightarrow{G}$ dei cicli (orientati). In caso negativo, si spieghi perché non esistano; in caso positivo, si determini esplicitamente almeno un ciclo (orientato).

(d) Determinare esplicitamente due diversi alberi ricoprenti del multigrafo $\mathbf{G}$.

(e) Descrivere graficamente (= disegnare...) il multidigrafo $\overrightarrow{G}$.

[6] Sia X un insieme, e siano λ la relazione in $\mathcal{P}(X)$ definita da

$$A\,\lambda\,B \iff \Big(A \cap \big(X \setminus B\big) = \emptyset\Big) \ \& \ \big(|B| \leq |A|\big) \qquad \text{per ogni} \quad A\,,B \in \mathcal{P}(X)$$

(a) Dimostrare che λ è una relazione d'ordine in $\mathcal{P}(X)$.

(b) Dimostrare che, se l'insieme X è finito, allora la relazione λ è l'identità in $\mathcal{P}(X)$.

(c) Dimostrare che, se l'insieme X è infinito, allora la relazione λ non è simmetrica.