

MATEMATICA DISCRETA
CdL in Informatica — a.a. 2015/2016

prof. Fabio GAVARINI

I sessione (=Sessione Estiva Anticipata) – I appello

Esame scritto del 2 Febbraio 2016

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... \otimes

[1] Si consideri il multidigrafo \vec{G} , avente esattamente cinque vertici v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 , la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$A_{\vec{G}} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il grado entrante $d^+(v)$, il grado uscente $d^-(v)$ e il grado totale $d^{tot}(v)$ di ciascun vertice v di \vec{G} .

(b) Determinare se il multidigrafo \vec{G} sia euleriano: in ogni caso (affermativo o negativo) si spieghi il perché; in caso affermativo inoltre, si determini esplicitamente un cammino euleriano, indicandone la successione di vertici e archi.

(c) Descrivere graficamente (= disegnare...) il multidigrafo \vec{G} .

(d) Determinare la matrice di adiacenza del multigrafo \overline{G} associato (o “soggiacente”) al multidigrafo \vec{G} .

(e) Determinare se il multigrafo \overline{G} (associato a \vec{G}) sia connesso. In caso negativo, indicare almeno due vertici che appartengano a componenti connesse diverse; in caso positivo, determinare almeno tre alberi generatori — a due a due diversi — di \overline{G} .

[2] Si consideri il polinomio booleano — nelle tre variabili x, y e z — dato da

$$p(x, y, z) := (z \wedge x' \wedge 0' \wedge y) \vee \left((x'' \vee (z \wedge 1 \wedge y'))' \wedge (y \vee 1' \vee x') \right)' \vee (x \vee z' \vee x)'$$

(a) Determinare una *forma minimale* di $p(x, y, z)$.

*(b) Determinare un polinomio equivalente a $p(x, y, z)$ che sia un *prodotto di somme*.

(...continua \implies)

[3] (a) Determinare se esistano soluzioni dell'equazione diofantea $13x + 44y = -6$ nell'anello degli interi \mathbb{Z} . In caso negativo, si spieghi perché tali soluzioni non esistano; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente una delle soluzioni.

(b) Determinare se esistano soluzioni dell'equazione modulare $\overline{44} \cdot \overline{x} = -\overline{19}$ nell'anello \mathbb{Z}_{13} degli interi modulo 13. In caso negativo, si spieghi perché tali soluzioni non esistano; in caso affermativo, si calcolino esplicitamente *tutte* le soluzioni.

(c) Nell'anello \mathbb{Z}_{13} degli interi modulo 13, determinare se esista l'inverso della classe $-\overline{8}$. In caso negativo, si spieghi perché tale inverso non esista; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente tale inverso.

[4] Si consideri l'insieme E e i suoi due sottoinsiemi E_+ ed E_- dati da $E := \{S, P, Q, R\}$, $E_+ := \{S, P\}$, $E_- := \{Q, R\}$. Si consideri anche la funzione

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E_+) \quad , \quad E' \mapsto f(E') := E' \cap E_+ \quad \forall E' \in \mathcal{P}(E)$$

e siano \rightarrowtail e \preccurlyeq le due relazioni in $\mathcal{P}(E)$ definite da

$$\begin{aligned} E' \rightarrowtail E'' &\iff f(E') \subseteq f(E'') \\ E' \preccurlyeq E'' &\iff \left(E' \rightarrowtail E'' \ \& \ (E' \cap E_-) \supseteq (E'' \cap E_-) \right) \end{aligned} \quad \forall E', E'' \in \mathcal{P}(E)$$

(a) Dimostrare che la funzione f è suriettiva.

(b) Dimostrare che la funzione f è *non* iniettiva.

(c) Dimostrare che la relazione \rightarrowtail è riflessiva e transitiva ma *non* antisimmetrica.

(d) Dimostrare che la relazione \preccurlyeq è una relazione d'ordine, e tale ordine *non* è totale.

(e) Esiste un massimo dell'insieme $\mathcal{P}(E)$ per l'ordine \preccurlyeq ? Se no, perché non esiste? Se sì, qual è tale massimo?

(f) Esiste un minimo dell'insieme $\mathcal{P}(E)$ per l'ordine \preccurlyeq ? Se no, perché non esiste? Se sì, qual è tale minimo?

*(g) L'insieme ordinato $(\mathcal{P}(E); \preccurlyeq)$ è un reticolo? In un caso o nell'altro — negativo o positivo che sia — si giustifichi la risposta.

[5] Siano $M, N \in \mathbb{N}$ i due numeri che in notazione posizionale sono espressi da

$$M := (2403)_{\text{CINQUE}} \quad \text{in base CINQUE}, \quad N := (3204)_{\text{DIECI}} \quad \text{in base DIECI},$$

utilizzando le cinque cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4 in base CINQUE e le dieci cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in base DIECI.

(a) Scrivere M in base DIECI.

(b) Scrivere N in base NOVE, usando le nove cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

(c) Scrivere N in base TRE, usando le tre cifre (ordinate) 0, 1, 2.