

**MATEMATICA DISCRETA**  
**CdL in Informatica — a.a. 2015/2016**  
*prof. Fabio GAVARINI*

*I sessione (=Sessione Estiva Anticipata) – I appello*  
Esame scritto del 2 Febbraio 2016

.....  
*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando  
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.....  $\odot$  .....

- [1] Si consideri il polinomio booleano — nelle tre variabili  $a, b$  e  $c$  — definito da
- $$q(a, b, c) := (b' \vee (a \wedge b)')' \vee ((b \wedge (c'' \wedge 1 \wedge a))' \wedge (c' \vee 0 \vee b'))' \vee (c' \wedge a \wedge 0' \wedge b)$$
- (a) Determinare una *forma minimale* di  $q(a, b, c)$ .
- \*(b) Determinare un polinomio equivalente a  $q(a, b, c)$  che sia un *prodotto di somme*.

- [2] Si consideri il multidigrafo  $\vec{G}$ , avente esattamente cinque vertici  $v_1, v_2, v_3, v_4$  e  $v_5$ , la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$A_{\vec{G}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare il grado entrante  $d^+(v)$ , il grado uscente  $d^-(v)$  e il grado totale  $d^{tot}(v)$  di ciascun vertice  $v$  di  $\vec{G}$ .
- (b) Determinare la matrice di adiacenza del multigrafo  $\overline{G}$  associato (o “soggiacente”) al multidigrafo  $\vec{G}$ .
- (c) Determinare se il multigrafo  $\overline{G}$  (associato a  $\vec{G}$ ) sia connesso. In caso negativo, indicare almeno due vertici che appartengano a componenti connesse diverse; in caso positivo, determinare almeno tre alberi generatori — a due a due diversi — di  $\overline{G}$ .
- (d) Determinare se il multidigrafo  $\vec{G}$  sia euleriano: in ogni caso (affermativo o negativo) si spieghi il perché; in caso affermativo inoltre, si determini esplicitamente un cammino euleriano, indicandone la successione di vertici e archi.
- (e) Descrivere graficamente (= disegnare...) il multidigrafo  $\vec{G}$ .

(...continua  $\implies$ )

[3] Siano  $M, N \in \mathbb{N}$  i due numeri che in notazione posizionale sono espressi da

$$M := (3204)_{\text{CINQUE}} \quad \text{in base CINQUE}, \quad N := (2403)_{\text{DIECI}} \quad \text{in base DIECI},$$

utilizzando le cinque cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4 in base CINQUE e le dieci cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in base DIECI.

(a) Scrivere  $M$  in base DIECI.

(b) Scrivere  $N$  in base TRE, usando le tre cifre (ordinate) 0, 1, 2.

(c) Scrivere  $N$  in base NOVE, usando le nove cifre (ordinate) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

[4] Si consideri l'insieme  $X$  e i suoi due sottoinsiemi  $X_+$  ed  $X_-$  dati da  $X := \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$ ,  $X_+ := \{\heartsuit, \spadesuit\}$ ,  $X_- := \{\clubsuit, \diamondsuit\}$ . Si considerino poi la funzione

$$h : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X_+) \quad , \quad X' \mapsto h(X') := X' \cap X_+ \quad \forall X' \in \mathcal{P}(X)$$

e le due relazioni  $\propto$  e  $\trianglelefteq$  in  $\mathcal{P}(E)$  definite da

$$X' \propto X'' \iff h(X') \supseteq h(X'')$$

$$X' \trianglelefteq X'' \iff \left( X' \propto X'' \ \& \ (X' \cap X_-) \subseteq (X'' \cap X_-) \right) \quad \forall X', X'' \in \mathcal{P}(E)$$

(a) Dimostrare che la funzione  $h$  è *non* iniettiva.

(b) Dimostrare che la funzione  $h$  è suriettiva.

(c) Dimostrare che la relazione  $\propto$  è riflessiva e transitiva ma *non* antisimmetrica.

(d) Dimostrare che la relazione  $\trianglelefteq$  è una relazione d'ordine, e tale ordine *non* è totale.

(e) Esiste un minimo nell'insieme ordinato  $(\mathcal{P}(X); \trianglelefteq)$ ? Se no, perché non esiste? Se sì, qual è tale minimo?

(f) Esiste un massimo nell'insieme ordinato  $(\mathcal{P}(X); \trianglelefteq)$ ? Se no, perché non esiste? Se sì, qual è tale massimo?

\*(g) L'insieme ordinato  $(\mathcal{P}(X); \trianglelefteq)$  è un reticolo? In un caso o nell'altro — negativo o positivo che sia — si giustifichi la risposta.

[5] (a) Determinare se esistano soluzioni dell'equazione diofantea  $16x + 41y = -5$  nell'anello degli interi  $\mathbb{Z}$ . In caso negativo, si spieghi perché tali soluzioni non esistano; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente una delle soluzioni.

(b) Determinare se esistano soluzioni dell'equazione modulare  $\overline{41} \cdot \bar{x} = -\overline{21}$  nell'anello  $\mathbb{Z}_{16}$  degli interi modulo 16. In caso negativo, si spieghi perché tali soluzioni non esistano; in caso affermativo, si calcolino esplicitamente *tutte* le soluzioni.

(c) Nell'anello  $\mathbb{Z}_{16}$  degli interi modulo 16, determinare se esista l'inverso della classe  $-\overline{7}$ . In caso negativo, si spieghi perché tale inverso non esista; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente tale inverso.