MATEMATICA DISCRETA

CdL in Informatica — a.a. 2015/2016

prof. Fabio GAVARINI

II sessione (=Sessione Estiva) – II appello (straordinario)

Esame scritto dell'1 Luglio 2016

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . ⊛ . . . .

[1] Si consideri il polinomio booleano — nelle tre variabili a, b e c — dato da

$$P(x,y,z) \ := \ \Big(\big(b'\vee c\vee 0\vee b'\,\big)\wedge\big(\,a'\vee\big(b'\wedge c\big)\vee 1'\vee c\big)\Big)' \vee \Big(\big(\,b'\vee a\vee c'\vee(\,b\wedge a)\big)\wedge\big(c'\wedge a'\wedge b\,\big)'\Big)'$$

(a) Determinare la *forma normale disgiuntiva* di P .

(b) Utilizzando il *Metodo del Consenso*, determinare la *somma di tutti gli implicanti primi* di P .

(c) Determinare — eventualmente sfruttando i risultati ottenuti in *(a)* e/o in *(b)* — una *forma minimale* di P .

[2] Sia $\underline{a} := \big\{a_n\big\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ tale che $a_n \,=\, 4\,a_{n-1} - 4\,a_{n-2}$ per ogni $n \geq 2$. Inoltre, si assuma che $a_0 \,=\, 5$ e $a_1 \,=\, 4$.

(a) Calcolare il valore a_3 della successione data.

(b) Dimostrare, tramite induzione forte su n , che per ogni $n \geq 2$ il numero a_n è un intero pari.

(c) Calcolare la forma esplicita — in funzione di $n \in \mathbb{N}$ — del termine generico a_n della successione.

[3] *(a)* Determinare il resto di 961^{70124} nella divisione per 14 .

(b) Calcolare, se esiste, la classe $\overline{23}^{\,-1}$ inversa di $\overline{23}$ nell'anello unitario $\mathbb{Z}_{14}$ delle classi resto modulo 14 ; se invece tale classe non esiste, se ne spieghi il motivo.

(c) Nell'anello (unitario) $\mathbb{Z}_{14}$ delle classi resto modulo 14 , determinare il sottoinsieme di tutte le classi invertibili (rispetto alla moltiplicazione).

(...continua $\Longrightarrow$)

[4] Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi si consideri la relazione η definita da

$$a \, \eta \, b \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 - b^2 \; = \; 4\,b - 4\,a \qquad\qquad \forall \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

(a) Dimostrare che la relazione η è un'equivalenza.

(b) Determinare esplicitamente almeno un numero $c \in \mathbb{Z}$ tale che $c \not\eta \, (-1)$, cioè *c non sia* η–equivalente a (-1).

(c) Determinare esplicitamente un numero $k \in \mathbb{Z}$ diverso da (-1) e tale che $k \, \eta \, (-1)$.

[5] Si consideri il multigrafo G, avente esattamente otto vertici v_1, v_2, $\dots$, v_8, la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$A_G \; := \; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare se esista una partizione in *cicli* dell'insieme E degli spigoli di G. In caso positivo, si trovi esplicitamente una tale partizione; in caso negativo, si spieghi perché una tale partizione non esista.

(b) Determinare se il multigrafo G sia euleriano: in ogni caso (affermativo o negativo) si spieghi il perché; in caso affermativo inoltre, si trovi esplicitamente un cammino euleriano in G, indicandone la successione di vertici e spigoli.

(c) Determinare, se esiste, un albero generatore del multigrafo G nel quale i vertici v_1, v_4, v_5, v_7 e v_8 siano *foglie*. In caso negativo, si spieghi perché un tale albero non esista.

(d) Determinare, se esistono, *sei* distinti sottomultigrafi di G che siano *alberi* e i cui vertici siano v_4, v_5, v_6 e v_8. Nel caso in cui ciò non sia possibile, se ne spieghi il perché.