MATEMATICA DISCRETA

CdL in Informatica — a.a. 2015/2016

prof. Fabio GAVARINI

II sessione (=Sessione Estiva) – I appello (ordinario)

Esame scritto del 17 Giugno 2016

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente***, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . ⊛ . . . .

[1] Si consideri il multidigrafo $\overrightarrow{G}$, avente esattamente cinque vertici v_1 , v_2 , v_3 , v_4 e v_5 , la cui matrice di adiacenza — rispetto alla fissata numerazione dei vertici — sia

$$A_{\overrightarrow{G}} \; := \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare se il multidigrafo $\overrightarrow{G}$ sia euleriano: in ogni caso (affermativo o negativo) si spieghi il perché; in caso affermativo inoltre, si determini esplicitamente un cammino euleriano in $\overrightarrow{G}$, indicandone la successione di vertici e archi.

(b) Determinare la matrice di adiacenza del multigrafo $\overline{G}$ associato (o "soggiacente") al multidigrafo $\overrightarrow{G}$.

(c) Determinare se il multigrafo $\overline{G}$ sia euleriano: in ogni caso (affermativo o negativo) si spieghi il perché; in caso affermativo inoltre, si determini esplicitamente un cammino euleriano in $\overline{G}$, indicandone la successione di vertici e spigoli.

(d) Determinare se il multigrafo $\overline{G}$ (associato a $\overrightarrow{G}$) sia connesso. In caso negativo, indicare almeno due vertici che appartengano a componenti connesse diverse; in caso positivo, determinare almeno *tre* alberi generatori — a due a due diversi — di $\overline{G}$.

[2] *(a)* Determinare — se esistono — tutte le successioni $\underline{a} := \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = 7 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \qquad a_n = 2\,a_{n-1} + 3\,a_{n-2} \qquad \forall \;\, n \geq 2$$

e per ciascuna di esse calcolare il valore a_4 .

(b) Determinare tutte le successioni $\underline{b} := \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$b_0 = 5 \;\; , \quad b_1 = -13 \;\; , \quad b_2 = -11 \;\; , \qquad b_n = 2\,b_{n-1} + 3\,b_{n-2} \qquad \forall \;\, n \geq 2 \quad .$$

(...continua $\Longrightarrow$)

[3] Si consideri l'insieme D_{360} dei divisori di 360, con la struttura usuale di reticolo data dalla relazione (d'ordine) di divisibilità.

(a) Determinare tutti gli atomi (se esistono) e tutti gli elementi $\vee$–irriducibili (se esistono) nel reticolo D_{360}.

(b) Determinare una $\vee$–fattorizzazione non ridondante in fattori $\vee$–irriducibili degli elementi $b := 36$, $d := 90$ e $q := 40$ in D_{360}, se possibile; se invece non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

(c) D_{360} è un'algebra di Boole? *(N.B.: motivare adeguatamente la risposta!)*

(d) Si consideri il sottoinsieme $\mathcal{D}' := \{4, 5, 6, 8, 9, 12, 18, 36, 40, 60, 72, 90, 120\}$ in D_{360}, dotato della relazione d'ordine di divisibilità. Relativamente a tale relazione d'ordine, si risponda alle seguenti domande:

(d.1) Esiste un *massimo* in $\mathcal{D}'$? Se sì, qual è? Se no, perché non esiste?

(d.2) Esistono in $\mathcal{D}'$ degli elementi *minimali*? Se no, perché? Se sì, quali sono?

(d.3) Rispetto all'assegnata relazione (d'ordine) di divisibilità, l'insieme ordinato $\mathcal{D}'$ è un reticolo?

[4] Si consideri l'insieme $E := \{S, P, Q, R\}$, il suo sottoinsieme $E_0 := \{S, P\}$ e l'insieme delle parti $\mathcal{P}(E)$ di E. Si consideri in $\mathcal{P}(E)$ la relazione η definita da

$$E' \,\eta\, E'' \iff E' \cap E_0 = E'' \cap E_0 \qquad \forall\ E', E'' \in \mathcal{P}(E)$$

(a) Dimostrare che la relazione η è un'equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente tutte le classi di η–equivalenza in $\mathcal{P}(E)$.

(c) Dimostrare che, dati $E_1, E_2, E_\star \in \mathcal{P}(E)$, vale per η la seguente proprietà:

$$\big(E_1 \,\eta\, E_\star\big) \;\; \& \;\; \big(E_2 \,\eta\, E_\star\big) \quad \Longrightarrow \quad \big(E_1 \cap E_2\big) \,\eta\, E_\star \;\; \& \;\; \big(E_1 \cup E_2\big) \,\eta\, E_\star$$

[5] Determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\circledast : \begin{cases} 17\,x \equiv -15 & \big(\mathrm{mod}\ 5\big) \\ -11\,x \equiv 5 & \big(\mathrm{mod}\ 3\big) \\ 23\,x \equiv 15 & \big(\mathrm{mod}\ 7\big) \end{cases}$$