

MATEMATICA DISCRETA
CdL in Informatica — a.a. 2015/2016

prof. Fabio GAVARINI

I sessione (=Sessione Estiva Anticipata) – II appello

Esame scritto del 16 Febbraio 2016

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in *corsivo* con grafia leggibile.*

..... \triangleright

[1] Determinare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$(*) : \begin{cases} 29x \equiv 16 & (\text{mod } 6) \\ -13x \equiv 21 & (\text{mod } 5) \\ 165x \equiv -13 & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

[2] Determinare — se esistono — tutte le successioni $\underline{a} := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$a_0 = -2 \quad , \quad a_1 = 8 \quad , \quad a_n = -8a_{n-1} - 16a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

e tutte le successioni $\underline{b} := \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tali che

$$b_0 = 3 \quad , \quad b_1 = -6 \quad , \quad b_2 = 0 \quad , \quad b_n = -8b_{n-1} - 16b_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \quad .$$

[3] Si consideri il reticolo D_n dei divisori di n per i due valori $n := 126$ e $n := 231$.

(a) Determinare tutti gli atomi e tutti gli elementi \vee -irriducibili di D_{126} e di D_{231} .

(b) Determinare una \vee -fattorizzazione non ridondante in fattori \vee -irriducibili degli elementi $b := 63 \in D_{126}$, $d := 33 \in D_{231}$ e $q := 21 \in D_{231}$, se possibile; se invece non fosse possibile, se ne spieghi il perché.

(c) D_{126} è un'algebra di Boole? D_{231} è un'algebra di Boole? (*N.B.: spiegare!*)

(d) Si consideri il sottoinsieme $\mathcal{D}_{126}^- := D_{126} \setminus \{1, 63, 126\}$, dotato della relazione d'ordine di divisibilità. Relativamente a tale relazione d'ordine, si chiede:

(d.1) Esiste un *massimo* in \mathcal{D}_{126}^- ? Se sì, qual è? Se no, perché non esiste?

(d.2) Esistono in \mathcal{D}_{126}^- degli elementi *minimali*? Se no, perché? Se sì, quali sono?

[4] Si consideri l'insieme $\mathbb{E} := \{\star, \diamond, \bullet\}$ e il corrispondente insieme delle parti $\mathcal{P}(\mathbb{E})$; si considerino poi in $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ le due relazioni \propto e ϑ definite da

$$\begin{aligned} E' \propto E'' &\iff \left(|E'| \geq |E''| \text{ oppure } E' = E'' \right) \\ E' \vartheta E'' &\iff |E'| = |E''| \end{aligned} \quad \forall E', E'' \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$$

- (a) Dimostrare che la relazione ϑ è una equivalenza.
- (b) Descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza di ϑ .
- (c) Dimostrare che la relazione \propto è una relazione d'ordine.
- (d) Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(\mathcal{P}(\mathbb{E}); \propto)$.
- (e) L'insieme ordinato $(\mathcal{P}(\mathbb{E}); \propto)$ è un reticolo? In un caso o nell'altro — negativo o positivo che sia — si giustifichi la risposta.

- [5] (a) Determinare il resto di 982^{40167} nella divisione per 15.
- (b) Nell'anello \mathbb{Z}_{15} delle classi resto modulo 15, determinare il sottoinsieme di tutte le classi invertibili (rispetto alla moltiplicazione).
