

# MATEMATICA DISCRETA

## CdL in Informatica

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2017–2018 — Sessione Estiva Anticipata, I appello

Esame scritto del 5 Febbraio 2018

.....

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando  
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

.....  $\mathcal{R}$  .....

[1] Determinare tutti i numeri  $x \in \mathbb{Z}$  che soddisfino *simultaneamente* le tre condizioni seguenti:

$$461x \equiv 385 \pmod{15} \quad (\text{in } \mathbb{Z}), \quad -\overline{69}\overline{x} = \overline{425} \quad (\text{in } \mathbb{Z}_{11}), \quad 101 \leq x \leq 200$$

[2] Dato l'insieme  $L := \{1, 2, 3, 5, 6, 18, 135, 270\}$ , si consideri in esso la relazione di divisibilità  $\delta$ , rispetto alla quale  $(L; \delta)$  è un insieme ordinato.

(a) Verificare che l'insieme ordinato  $(L; \delta)$  è un reticolo, scrivendo esplicitamente tutti i valori  $\sup(x, y)$  e  $\inf(x, y)$  per ogni  $x, y \in L$  (tranne i casi banali).

(b) Determinare tutti gli atomi del reticolo  $(L; \delta)$ .

(c) Determinare tutti gli elementi  $\vee$ -irriducibili del reticolo  $(L; \delta)$ .

(d) Per ciascuno dei due elementi 135 e 270 in  $L$ , determinare se esista una  $\vee$ -fattorizzazione non ridondante in fattori  $\vee$ -irriducibili per tale elemento. Nel caso in cui una tale  $\vee$ -fattorizzazione non esista, se ne spieghi il perché; nel caso in cui ne esista almeno una, si determinino *tutte* (a meno dell'ordine dei fattori) le  $\vee$ -fattorizzazioni di tal genere.

(e) Stabilire, motivando adeguatamente la risposta, se il reticolo  $(L; \delta)$  sia un'algebra di Boole oppure no.

[3] Sia  $E$  un insieme, e  $\mathcal{P}(E)$  il suo insieme delle parti. Consideriamo in  $\mathcal{P}(E)$  le relazioni  $\lambda$  e  $\lambda^*$  così definite:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \lambda B \iff^{\text{DEF}} A = B \text{ oppure } |A \cap B| = 2$$

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \lambda^* B \iff^{\text{DEF}} \begin{cases} \exists X_1, \dots, X_n \in \mathcal{P}(E) \text{ t.c.} \\ A = X_1, X_n = B, X_i \lambda X_{i+1} \quad \forall i < n. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che la relazione  $\lambda^*$  è transitiva.

(b) Dimostrare che la relazione  $\lambda$  è riflessiva e simmetrica.

(c) Dimostrare che  $\lambda^*$  è una relazione di equivalenza.

(d) Descrivere esplicitamente tutte le classi di equivalenza di  $\lambda^*$ .

(continua...)

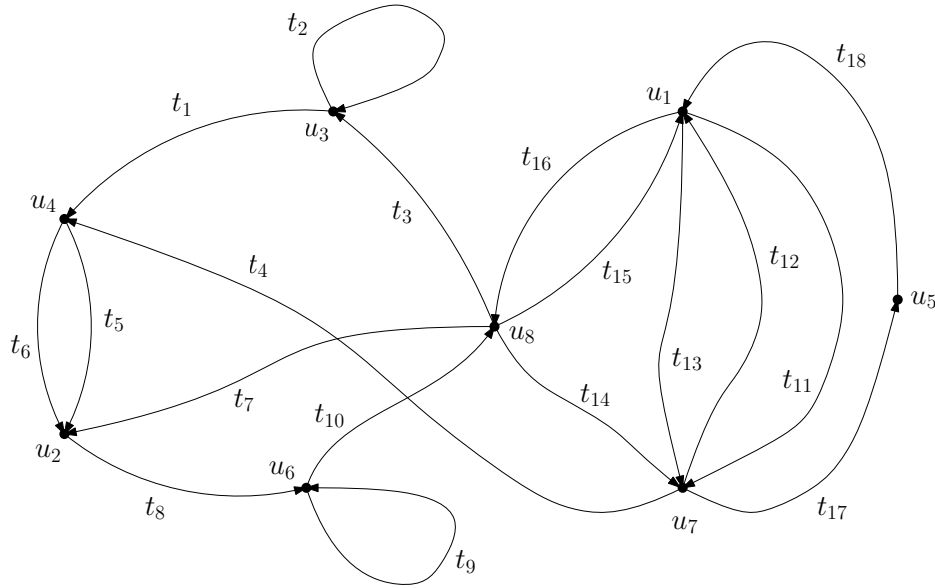
[4] Determinare la *Forma Normale Disgiuntiva* del polinomio booleano

$$P(x, y, z) = \left( \left( \left( (1' \vee y')' \wedge x \right)' \vee (z \wedge y') \vee (y \wedge 0' \wedge z'' \wedge y') \right)' \wedge \right. \\ \left. \wedge \left( (x'' \wedge 1 \wedge y' \wedge x)' \vee z' \vee (1' \vee x' \vee z)' \right)' \right)'$$

[5] (a) Per ciascuna delle due classi  $\overline{15}$  e  $\overline{10}$  nell'anello unitario  $\mathbb{Z}_{21}$  delle classi resto modulo 21, calcolare la classe inversa, o dimostrare che non esiste.

(b) Determinare tutti gli interi  $x \in \mathbb{Z}$  tali che  $-53x \equiv 68^{12364} \pmod{21}$ .

[6] Sia  $\vec{G} := (U, T)$  il multidigrafo così rappresentato:



(a) Determinare esplicitamente la matrice di adiacenza del multidigrafo  $\vec{G}$ .

(b) Determinare se il multidigrafo  $\vec{G}$  sia euleriano oppure no: in caso negativo si spieghi il perché, in caso affermativo si determini esplicitamente un possibile cammino euleriano.

(c) Indicando con  $\overline{G}$  il multigrafo associato a  $\vec{G}$ , si determini esplicitamente la matrice di adiacenza di  $\overline{G}$ .

(d) Determinare se il multigrafo  $\overline{G}$  sia euleriano oppure no: in caso negativo si spieghi il perché, in caso affermativo si determini esplicitamente un possibile cammino euleriano.

(e) Il multigrafo  $\overline{G}$  non è un albero. Com'è possibile dedurre questo fatto dalla sola analisi della matrice di adiacenza di  $\overline{G}$ ?

(f) Determinare esplicitamente tre diversi alberi ricoprenti di  $\overline{G}$ .